

# **Symmetrien, Erhaltungssätze und Bilanzgleichungen in verallgemeinerten Elastizitätstheorien mit Mikrostruktur und Eichfeldtheorien der Versetzungen**

Vom Fachbereich Bauingenieurwesen  
der Technischen Universität Darmstadt  
genehmigte

## **Dissertation**

zur Erlangung des Grades  
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

von

**Dipl.-Ing. Charalampos Anastassiadis**  
aus Athen

Hauptreferent: Dr. rer. nat. Markus Lazar  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Charalampos Tsakmakis

Tag der Einreichung: 2. November 2007  
Tag der mündlichen Prüfung: 14. Dezember 2007

Darmstadt, 2007  
D 17



# Kurzfassung

Es werden Erhaltungssätze und Bilanzgleichungen für ein elastisches Kontinuum mit einer deformierbaren Mikrostruktur hergeleitet. Unter Benutzung der Lie-Gruppen Theorie findet man alle Lie-Punkt Symmetrien, welche die Lagrangedichte der elastischen Kontinua mit einer Mikrostruktur invariant lassen. Das Noether Theorem dient in der Feldtheorie als Mittel zur Herleitung von Erhaltungssätzen aus den bekannten kontinuierlichen Lie-Punkt Symmetrien. Die Erhaltung des Impulses und Drehimpulses folgt entsprechend aus der räumlichen Translations und Rotationssymmetrie. Die Erhaltung der Energie entspricht der Translationssymmetrie in der Zeit. Beim Übergang von dem klassischen elastischen Kontinuum in ein solches mit einer Mikrostruktur wird die Skalierungssymmetrie der Lagrangedichte gebrochen. Dadurch entsteht aus einem Erhaltungssatz eine Bilanzgleichung. Auf der gleichen Art und Weise wie für ein elastisches Medium mit einer Mikrostruktur findet man Erhaltungssätze und Bilanzgleichungen für die lineare Gradientenelastizität. In der hier behandelten Gradientenelastizität wird in der Materialgleichung für die Spannung zusätzlich zum ersten noch der zweite Verschiebungsgradient berücksichtigt.

Nach einer kurzen Einführung in die inkompatible Elastizität und nachdem man ein Verständnis für die relevanten physikalischen Größen wie den Versetzungsdichtetensor bekommen hat, wird die  $T(3)$  Eichtheorie der Versetzungen für ein linear isotropes elastisches Kontinuum behandelt. Man wählt dabei einen asymmetrischen Spannungstensor als Verallgemeinerung des bis jetzt üblich verwendeten symmetrischen Cauchy'schen Spannungstensors. Die Lagrangedichte setzt sich additiv aus zwei Bestandteilen zusammen, jenen inkompatiblen elastischen Anteil und einen solchen, welcher den Versetzungskern an sich beschreibt. Bei der Behandlung der Versetzungstheorie nach der inkompatiblen Elastizitätstheorie taucht der Versetzungskernanteil nicht auf. Unter Verwendung der gleichen mathematischen Methoden wie zuvor in dieser Arbeit konstruiert man die Erhaltungssätze und Bilanzgleichungen. Man zeigt die Bedeutung der Eichfeldtheorie zur Bestimmung regulärer Lösungen im Gebiet um den Versetzungskern für eine Schrauben und Stufenversetzung. Aufgrund der Zylindersymmetrie für das anti-ebene Distorsionsproblem der Schraubenversetzung spielt nur eine innere Länge eine Rolle. Im Gegensatz dazu, liefert die Eichfeldtheorie mit asymmetrischen Spannungen zwei innere Längen. Somit lassen sich die Momentenspannungen sowohl aus reinen Torsionsexperimenten wie auch Biegeexperimenten berechnen. Schließlich bekommt man einen kurzen Einblick in die Gleichungen der dynamischen Eichfeldtheorie der Versetzungen.



# Abstract

Conservation and balance laws are derived for generalized continuous media such as a microstretch and micromorphic elastic solid. This is achieved by using Lie-group theory, which provides us with all the continuous Lie-point symmetries leaving the appropriate Lagrangians for the description of elastic materials with microstructure invariant. The Noether Theorem works in field theory as a tool for obtaining conservation laws from continuous symmetries. Conservation of linear and angular momentum arises respectively from translation and rotation in space, whereas conservation of energy is caused because of the translational symmetry in time. By passing from classical continuum theory of elasticity to an elastic continuum containing a microstructure, scaling symmetry is broken. As a consequence the conversion of a conservation law into a balance law is taking place. In exactly the same manner conservation and balance laws for the linear gradient elasticity are found, whose constitutive relation for the stress takes in addition to the first also the second displacement gradient into account.

After a brief introduction into incompatible elasticity and giving an insight into physical quantities such as the dislocation density tensor, we present the  $T(3)$ -gauge theory of dislocations in an isotropic elastic medium. Thereby an asymmetric stress tensor is chosen as a generalisation of the until now always used symmetric Cauchy stress tensor. The Lagrangian is composed of two parts, an incompatible elastic one and a part responsible for the dislocation core, which is missing in classical incompatible elasticity. Using the same techniques as we did for the other theories of generalized elastic media, we construct conservation and balance laws. The value of the translational gauge theory of dislocations for obtaining regular solutions for the distortion and stress field around the core of a screw and edge dislocation is also shown. Due to the cylindrical symmetry of the anti-plane strain problem for a screw dislocation only one inner length comes into play. On the contrary, for the plane strain problem of an edge dislocation gauge theory with asymmetric stress predicts for the first time two inner lengths, being now able to describe couple stresses arising from pure torsion as well as bending experiments of probes. Finally an insight into the dynamical equations of the gauge theory of dislocations is shortly provided.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Elastizitätstheorie</b>	<b>7</b>
2.1	Kinematik und Dynamik . . . . .	7
2.2	Statische Bilanzgleichungen und Erhaltungsintegrale . . . . .	16
2.2.1	Das $J_k$ -Integral . . . . .	16
2.2.2	Das $L_k$ -Integral . . . . .	18
2.2.3	Das $M$ -Integral . . . . .	19
2.3	Lie-Punkt Symmetrien . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Mikrostruktur in der Elastizität</b>	<b>33</b>
3.1	Kinematik und Dynamik . . . . .	33
3.2	Elastizität mit Mikrodilatation . . . . .	36
3.3	Lie-Punkt Symmetrien . . . . .	36
3.4	Erhaltungssätze . . . . .	40
3.4.1	Translationsstrom . . . . .	41
3.4.2	Rotationsstrom . . . . .	42
3.4.3	Addition von Lösungen . . . . .	43
3.4.4	Skalierungsstrom . . . . .	43
3.5	Mikromorphe Elastizität . . . . .	44
3.6	Erhaltungssätze . . . . .	46
3.6.1	Translationsstrom . . . . .	49
3.6.2	Rotationsstrom . . . . .	51
3.6.3	Addition von Lösungen . . . . .	53
3.6.4	Skalierungsstrom . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Gradientenelastizität</b>	<b>55</b>
4.1	Lie-Punkt Symmetrien . . . . .	57
4.2	Erhaltungssätze . . . . .	59
4.2.1	Translationsstrom . . . . .	60
4.2.2	Rotationsstrom . . . . .	62
4.2.3	Addition von Lösungen . . . . .	64
4.2.4	Skalierungsstrom . . . . .	64
4.3	Bilanzgleichungen . . . . .	66

<b>5</b>	<b>Inkompatible Elastizitätstheorie</b>	<b>67</b>
5.1	Defekte im Kristall . . . . .	67
5.2	Kinematik . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Eichfeldtheorie der Versetzungen</b>	<b>75</b>
6.1	Lie-Punkt Symmetrien . . . . .	82
6.2	Kanonische Ströme . . . . .	84
6.2.1	Translationsstrom. . . . .	85
6.2.2	Rotationsstrom . . . . .	86
6.2.3	Skalierungsstrom . . . . .	87
6.2.4	Eichtransformation . . . . .	89
6.2.5	Eichinvariante Ströme . . . . .	89
6.3	Konfigurationskräfte und Momente . . . . .	90
6.3.1	Translationsstrom . . . . .	90
6.3.2	Rotationsstrom . . . . .	92
6.3.3	Skalierungsstrom . . . . .	94
6.3.4	Eichinvarianz . . . . .	96
6.4	Statische Lösungen . . . . .	96
6.4.1	Schraubenversetzung . . . . .	98
6.4.2	Stufenversetzung . . . . .	111
6.4.3	Fall A: $\ell_3 = \ell_2$ . . . . .	125
6.4.4	Fall B: $\gamma \rightarrow \infty$ . . . . .	130
6.4.5	Fall C: $\ell_1 = \ell_2, \gamma = 0$ . . . . .	132
6.5	Die mikromorphe Elastizität als Versetzungstheorie. . . . .	132
6.6	Das dynamische anti-ebene Problem . . . . .	134
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>137</b>
<b>A</b>		<b>141</b>
A.1	Krümmungstensoren . . . . .	141
A.2	Cartansche Torsion . . . . .	142
A.3	Die Taylorreihen der modifizierten Bessel Funktionen . . . . .	144
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>145</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Diese Arbeit entstand aus dem Bedürfnis ein besseres Verständnis für die *Eichfeldtheorie der Versetzungen* zu bekommen, sowie *Erhaltungssätze* und *Bilanzgleichungen* für die Elastizitätstheorie mit einer Mikrostruktur und die Gradientenelastizität herzuleiten. Die Motivation für die Weiterentwicklung der Eichfeldtheorie entstand aus der Notwendigkeit heraus, noch offene Fragestellungen über die Konstitutivgleichungen und die richtige Beziehung zwischen den Materialparametern befriedigend zu beantworten. Die schon über fünfundzwanzig Jahren zurückliegenden Arbeiten von Golebiewska-Lasota [1] und Kadić und Edelen [2, 3] in diesem Gebiet boten die ersten Vorschläge für die Anwendung des Eichprinzips auf die Versetzungstheorie. Da sie aber was die richtige Wahl der Konstitutivgleichungen angeht, unvollständig blieben, eigneten sie sich nicht für die physikalische Anwendungen und Lösung konkreter Problemstellungen. Versuche innerhalb der Eichfeldtheorie der Versetzungen Lösungen für die kinematischen und dynamischen Zustandsgrößen für eine Schrauben und Stufenversetzung anzugeben findet man in den Arbeiten von Edelen [4], Valsakumar und Sahoo [5], Malyshev [6], Sharma [7] und Lazar [8, 9, 10]. Letzterem gelang eine geeignetere Wahl der Materialgleichung für den Hyperspannungstensor für ein homogenes und isotropes elastisches Kontinuum. Für den Torsionstensor wurden aus seiner irreduziblen Zerlegung drei Materialparameter anstatt einem gewählt, wie dies immer früher der Fall gewesen ist. In dieser Arbeit führt man einen weiteren Schritt um zu einer allgemeineren Eichtheorie zu gelangen. Die Bedingung für die Symmetrie des Spannungstensors entfällt, d.h. es wird eine Eichfeldtheorie der Versetzungen mit asymmetrischen Spannungen präsentiert. Man erhofft sich dadurch ein physikalisch realistisches Bild von den sich um eine Versetzung aufbauenden Distorsions und Spannungszuständen geben zu können. Gleichzeitig soll gezeigt werden, wie die gegenseitige Wechselwirkung zwischen zwei einzelnen Versetzungen verläuft. Innerhalb der Eichfeldtheorie findet man Lösungen für das Problem der Kraftberechnung zwischen zwei Versetzungen bei Valsakumar und Sahoo [11]. Eringen [12] gab eine Lösung mit Hilfe der nichtlokalen Elastizität. Es wird gezeigt in welcher Art und Weise sich unser Ergebnis, was die Lage und Höhe des Maximums dieser Kraft angeht, davon unterscheidet. Damit soll die Eichfeldtheorie der Versetzungen eine abgeschlossene Fundamentaltheorie werden, welche als Grundlage der mikroskopischen und auf sie beruhende makroskopischen Elastopla-

stizität dienen soll. Aus der hier dargestellten Form erhält man wichtige innere Längen für Biege und Torsionsprobleme. Damit ließe sich mit dieser Theorie auch für die, in den Experimenten beobachtbaren Längeneffekte im Mikrometerbereich eine Erklärung finden.

Die vorhandenen Symmetrien in den Bewegungsgleichungen und der Lagrangedichte eines physikalischen Systems sind insofern wichtig, weil man durch ihre Kenntnis Erhaltungssätze und Bilanzgleichungen konstruieren kann. Aus diesem Grund kommt der Anreiz, die in der klassischen Elastizitätstheorie schon bekannten Erhaltungssätze auch in anderen phänomenologischen Kontinuumsmodellen wie das der mikromorphen Elastizität und Gradientenelastizität zu finden. Die Bewegungsgleichungen leiten sich wie im Fall der Navier-Gleichungen der klassischen Elastizität aus der Stationarität eines Wirkungsfunktional ab. Die Variationssymmetrien dieser Funktionale führen auf lokale Erhaltungssätze. Aus einer Volumenintegration und mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes erhält man daraus globale Erhaltungssätze für ein homogenes, isotropes elastisches Medium. Für ein inhomogenes und anisotropes Material wird entsprechend die Translations- und Rotationssymmetrie der Lagrangedichte gebrochen. Aus den lokalen Erhaltungssätzen werden Bilanzgleichungen. Die Oberflächenintegrale über den Energie-Impuls Tensor und Drehimpulstensor verschwinden nicht, sondern stellen ein Maß für die Größe der Konfigurationskraft und des Konfigurationsmomentes dar. Man bekommt für die mikromorphe Elastizität und Gradientenelastizität auf gleicher Art und Weise Ausdrücke wie die in der klassischen Elastizität bekannte  $J_k$ - und  $L_k$ -Integrale. Mit dem ausgerechneten  $J_k$ -Integral kann die *Konfigurationskraft* an der Rispspitze eines solchen Materials als Erweiterung der von Rice [13] angegebenen Formel in der klassischen Elastizität angesehen werden. Das  $M$ -Integral ist ein Erhaltungsintegral in der klassischen Elastizität und drückt die Tatsache der Skalierungssymmetrie aus. Dieses Kontinuum zeigt ein skalenunabhängiges, selbstähnliches Verhalten. Andererseits wird diese integrale Erhaltungsgröße sowohl in der mikromorphen Elastizität als auch in der Gradientenelastizität gebrochen. Die Lösungen der Euler-Lagrange Gln. hängen von den charakteristischen *inneren Längen* ab. Dieser Symmetriebruch offenbart sich als Konfigurationsarbeit in der Elastizität mit Mikrostruktur und in der Gradientenelastizität.

Diese Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Der erste Teil behandelt die Lie-Punktsymmetrien der Euler-Lagrange Gln. sowie die Variationssymmetrien, Erhaltungssätze und Bilanzgleichungen in der klassischen kompatiblen Elastizitätstheorie, mikromorphen Elastizität und Gradientenelastizität. Im zweiten Teil wird die Kinematik der inkompatiblen Elastizität beschrieben und die für ein homogenes und isotropes Kontinuum Eichfeldtheorie der Versetzungen mit asymmetrischen Spannungen vorgestellt. Es werden Erhaltungssätze und Bilanzgleichungen aus der Lagrangedichte hergeleitet sowie die statischen Gleichungen für das Problem einer Schrauben- und Stufenversetzung im unendlich ausgedehnten, linear isotropen Kontinuum gelöst. Als Ausblick geben wir die Gleichungen der dynamischen Eichfeldtheorie für das anti-ebene Problem einer gleichmäßig bewegten Schraubenversetzung an.

Nach dieser Einleitung, dient das zweite Kapitel als Einführung in die klassische Elastizitätstheorie und den mathematischen Methoden aus der Gruppentheorie, die uns

im Laufe der gesamten Arbeit begleiten werden. Es werden die von Sophus Lie (1842-1899) [14]–[17] entdeckten gruppentheoretischen Methoden von Differentialgleichungen benutzt. Dieser befaßte sich mit kontinuierlichen Transformationen von unabhängigen Variablen  $\mathbf{x}$  und abhängigen Variablen  $\mathbf{u}$ , welche die Differentialgleichungen invariant lassen. In den neuen gestrichelten Koordinaten  $\mathbf{x}'$  und  $\mathbf{u}'$  besitzen die Differentialgleichungen die gleiche Form wie in den alten Koordinaten  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{u}$ , d.h. diese Transformation läßt sie *forminvariant*. Diese Transformationen stellen *kontinuierliche Symmetrien* dar. Diese Symmetrien hängen von einer Anzahl reeller Parameter  $\epsilon$  ab. Die Lösungsmannigfaltigkeit bleibt dabei unverändert, d.h. die Lösungsschar wird in sich abgebildet. Jede einzelne Lösungskurve wird in eine andere Lösungskurve so abgebildet, daß das gesamte Bild der Lösungsmannigfaltigkeit unverändert bleibt. Diese Transformationen werden *Lie-Punkt Symmetrien* genannt. Sie erfüllen alle Axiome einer Gruppe. Für lange Zeit waren die von Sophus Lie entdeckten mathematischen Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen in Vergessenheit geraten. Erst in den fünfziger Jahren erlebten sie eine Renaissance in der Schule von Novosibirsk durch Ovsyannikov [18, 19]. Die gruppentheoretischen Methoden wurden zur Gewinnung von gruppeninvarianten Lösungen in der nichtlinearen Gasdynamik und Hydromechanik verwendet. Bluman [20] konstruierte unter Benutzung der Lie-Gruppen Transformationen Lösungen für bestimmte Gleichungen aus der mathematischen Physik wie die Fokker-Planck Gleichung und die nichtlineare Wärmeleitungsgleichung. Später versuchte Bluman und seine Mitarbeiter Methoden zu entwickeln mit denen man Erhaltungssätze für Differentialgleichungen finden kann, die nicht aus einem Variationsprinzip stammen. Weitere Referenzen findet man auch in den Büchern [21, 22]. Ibragimov und Anderson [23, 24] untersuchten Transformationen bei denen die unabhängigen und abhängigen Variablen noch von höheren Ableitungen dieser abhängen dürfen, sogenannte Lie-Bäcklund Gruppen. Anwendungen dieser Transformationen finden sich unter anderem in den Gleichungen der nichtlinearen Optik und in den dispersiven Flachwassergleichungen [23, 24].

Emmy Noether [25] zeigte, wie sich aus kontinuierlichen Symmetrien für die Lagrangedichte eines Variationsproblems, sogenannte *Variationssymmetrien*, Erhaltungssätze gewinnen lassen. Damit war auch ein großer Meilenstein für die theoretische Physik gelegt, da mit dem Noetherschen Theorem sich die Möglichkeit ergab auf systematischen Weg die Erhaltungssätze für physikalische Theorien mit einer Lagrangedichte herzuleiten. Als erster nutzte Bessel-Hagen [26] das Noethersche Theorem, um Erhaltungssätze in der klassischen Elektrodynamik zu finden. Dabei erweiterte er das Konzept der Variationssymmetrien, indem er eine Divergenzgröße in den Erhaltungsströmen zuließ. Er bezeichnete diese Symmetrien für die Lagrangedichte als Divergenzsymmetrien. Peter Olver [27, 28] nutzte entsprechend die Methode von Sophus Lie und das Noether Theorem um alle Symmetrien der Navier-Gleichungen zu vervollständigen und ergänzte alle bis dahin von Günther [29], Knowles und Sternberg [30] bekannte Erhaltungssätze in der klassischen Elastostatik. Für die Elastodynamik wurden die Erhaltungssätze von Fletcher [31] hergeleitet. Wir werden durchgehend in dieser Arbeit für die Berechnung der Symmetrien die Methode von Peter Olver [32] benutzen. Daraus können auf einem systematischen Weg ohne einen hohen Aufwand wichtige Erhaltungssätze und Bi-

lanzgleichungen für die *mikromorphe Elastizität* und *Gradientenelastizität* konstruiert werden.

In diesem Sinne werden im dritten Kapitel Erhaltungssätze und Bilanzgleichungen für ein elastisches Kontinuum mit einer deformierbaren Mikrostruktur berechnet. Dieses Medium stellt die Verallgemeinerung des von den Cosserat Brüdern [33] am Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts entdeckten Kontinuums. In einem sogenannten *Cosserat-Kontinuum* oder auch *mikropolaren Kontinuum* erhält die Materie lokal in jedem Punkt eine angeheftete starre und homogene Mikrostruktur. Diese kann unabhängig vom Makrokontinuum in jedem materiellen Punkt frei drehen. Durch den axialen Vektor dieser Mikrorotation erhöht sich die Anzahl der Freiheitsgrade eines klassischen, elastischen Kontinuums um drei auf sechs. Der Gradient dieser neuen kinematischen, vektorwertigen Größe ist eine Tensorgröße und ruft als Reaktionsgröße sogenannte *Momentenspannungen* (Kräftepaar-Dipole) hervor. Die Lagrangedichte kann zusätzlich zum Verschiebungsfeld nach diesem unabhängigen Drehfeld der Mikrostruktur variiert werden. Als Ergebnis kommt zur üblichen Impulsbilanzgleichung die Drehimpulsbilanzgleichung hinzu, welche in der klassischen Elastizität trivialerweise wegen der vorausgesetzten Symmetrie des Spannungstensors erfüllt wird. Die Asymmetrie des Spannungstensors in einem mikropolaren Medium dient als Quelle für die Momentenspannungen. Die für lange Zeit in Vergessenheit geratene Arbeit der Gebrüder Cosserat fand wieder eine Bedeutung und Weiterentwicklung durch die Arbeiten von Günther [34] Schäfer [35], Mindlin [36] und Eringen [37]. Die letzten zwei genannten Autoren verallgemeinerten das Cosserat-Modell und ließen aus einer starren eine deformierbare Mikrostruktur werden. Aus dem polaren Vektor der Mikrodrehung entsteht der Tensor der Mikrodeformation. Als kanonisch konjugierte Größe zum Mikrodeformationsgradienten erscheint der *Hyperspannungstensor* als Tensor dritter Stufe. Für ein solches *mikromorphes* Kontinuum untersucht man die Lie-Punkt-Symmetrien der Euler-Lagrange Gln. und die Variations und Divergenzsymmetrien der Lagrangedichte. Wir geben die für die mikromorphe Elastizität verallgemeinerte lokale und integrale Erhaltungsgrößen und berechnen explizit die  $J_k$ -,  $L_k$ - und  $M$ -Integrale. Wir zeigen, wie sich die Erhaltungssätze für die explizite Abhängigkeit der Lagrangedichte von den Ortskoordinaten und in Anwesenheit äußerer konservativen Volumenkräfte und Momente zu Bilanzgleichungen verändern.

Das vierte Kapitel widmet sich der Gradientenelastizität. Im Prinzip stellt sie auch die naheliegenste Erweiterung der klassischen Elastizität dar. Man läßt einfach die Lagrangedichte von dem nächst höheren Verschiebungsgradienten abhängen, welcher die zweite Ableitung für das Verschiebungsfeld beinhaltet. Dies kann für die zeitliche als auch für die räumliche Ableitung geschehen. Mindlin [36] untersuchte diese Art von Kontinuum und stellte für kleine und große Wellenzahlen neue Dispersionsrelationen auf. Dieses Modell gab auch die Inspiration zur Erschaffung neuer phänomenologischen Modellen für die Plastizität die unter dem Namen Gradientenplastizität [38, 39] bekannt wurden. Man wendet die gleichen mathematischen Methoden wie in den beiden vorherigen Kapiteln zur Erzeugung von Erhaltungssätzen und Bilanzgleichungen an.

Das Thema des fünften Kapitels ist die *inkompatible* Elastizität. Werden die Saint-Venant Kompatibilitätsbedingungen verletzt, so erleidet das Verschiebungsfeld Sprünge

und ist unstetig. Dies ist z.B. der Fall, wenn in einem Material Versetzungen existieren. Davon gibt es zwei Sorten, die Schrauben und Stufenversetzungen, die ohne Zweifel als die mikroskopische Ursache der plastischen Deformierbarkeit von Metallen gelten [40]. Am Anfang des vierten Kapitels erläutern wir kurz ihre Entstehung. In den fünfziger Jahren stellten die Arbeiten von Kondo [41, 42] und unabhängig davon von Bilby, Bullough und Smith [43, 44] und Kröner [45] eine Beziehung der nicht-Riemannschen Geometrie zur Versetzungstheorie und zeigten, daß die differentialgeometrische Größe des Torsionstensors von Elie Cartan [46] mit dem dreistufigen Versetzungsdichtetensor identisch ist. Die Torsion ist als eine in zwei Indizes antisymmetrische affine Konnexion definiert. Wegen dieser gefundenen Identität ist der zweistufige Versetzungsdichtetensor, der zur Torsion, dualer Tensor. Wir führen die wichtige kinematische Größe des Versetzungsdichtetensors als die Rotation der plastischen Distorsion ein [40]. Für ein inkompatibles lineares elastisches Material zerlegt man die totale Distorsion in einem elastischen und plastischen Anteil. Jeder dieser Anteile ist für sich inkompatibel, aber die Gesamtsumme, also die totale Distorsion erfüllt die Kompatibilitätsbedingung. Die Divergenz des Versetzungsdichtetensors ist Null. Damit sind die Versetzungslinien in einem elastischen Kontinuum genau so wie die Wirbellinien in einem Fluid entweder geschlossen, oder enden an einer freien Oberfläche. Wenn keine äußere Volumenkkräfte vorliegen, sind die Navier-Gleichungen der kompatiblen Elastizität homogen. In der inkompatiblen Elastizität bekommt man aus der additiven Zerlegung des totalen Verzerrungsgradienten in einem elastischen und plastischen Anteil eine inhomogene Navier-Gleichung. Auf der rechten Seite erscheinen drei Terme mit plastischen Größen. Man kann das Verschiebungsfeld nur für ein vorgegebenes plastisches Verzerrungsfeld bestimmen. Eine Evolutionsgleichung für das plastische Verzerrungsfeld muß noch postuliert werden.

Das sechste Kapitel behandelt die Eichfeldtheorie der Translation für die Versetzungen. In dieser Theorie gelingt es aus einer Variation der Lagrangedichte nach den zwei *Eichfelder* (plastische Geschwindigkeit und plastische Distorsion), zur Impulsgleichung zwei Bilanzgleichungen für die zum Versetzungsdichtetensor und Versetzungsstromdichtetensor kanonisch konjugierte Größen zu bekommen. Das resultierende Differentialgleichungssystem ist geschlossen und beschreibt die Evolutionsdynamik der Versetzungen unter dem Einfluß der Spannung und des Impulses im elastischen Medium. Ein solches Evolutionssystem wurde erstmalig von Kadić und Edelen [3] aufgestellt und zeigt nach Konstruktion eine Analogie zu den inhomogenen Maxwell-Gleichungen der klassischen Elektrodynamik. Seitdem gab es weitere Arbeiten in diesem Gebiet, die an der mathematischen Struktur zwar formal richtig, aber für die Anwendung und Lösung konkreter Problemstellungen, wegen unvollständiger und ungeigneter Wahl der Materialparameter in den Konsitativgleichungen, anfechtbar blieben. In der Arbeit von Edelen [4] wird ein symmetrischer Spannungstensor und ein Materialparameter für den Torsionstensor verwendet. Im Allgemeinen besitzt der Torsionstensor drei irreduzible Anteile und damit auch drei Materialparameter. Für das ebene Problem der Berechnung des Distorsionsfeldes um eine Schraubenversetzungslinie bekommt man eine Relation zwischen den Kopplungsparametern. Setzt man wie im Fall von Edelen zwei von diesen gleich Null, so bekommt man eine verschwindende innere Länge und

als Lösung die klassische triviale Lösung. Malyshev [6] benutzt die Einstein Wahl für die drei Materialparameter des Torsionstensors. Er bekommt eine unphysikalische, oszillierende von Bessel-Funktionen bestimmende Lösung für das Spannungsfeld einer Stufenversetzung. Der Ursprung dieser Widersprüche liegt daran, daß die Einstein Wahl die Bedingung für die positive Definitheit der Energie verletzt. Das Übernehmen der Einstein-Wahl von der allgemeinen Relativitätstheorie ist für die Versetzungstheorie ungeeignet. Wir stellen die statische Eichfeldtheorie mit asymmetrischen Spannungen vor. Es werden entsprechend das anti-ebene und ebene Problem für eine Schrauben und Stufenversetzung gelöst. Es wird die Notwendigkeit von asymmetrischen Spannungen für den Versetzungskern und das langreichweitige Fernfeld gezeigt. Dazu formuliert man ein Materialgesetz mit drei Materialparameter für die Kraftspannungen, sowie drei weitere Materialparameter für die Hyperspannungen. Zu den Laméschen Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  kommt als neuer Materialparameter im Vergleich zur symmetrischen Eichfeldtheorie der Drehmodul  $\gamma$  hinzu. Die Bedeutung des Drehmoduls für das Spannungsfeld einer Versetzung wurde schon früher vom Kröner [47] erkannt. In dieser Theorie entfallen die von Edelen [4] getroffene ad-hoc Annahmen. Ebenso wird die Irrelevanz der von Malyshev [6] benutzte Einstein Wahl für die Kopplungskonstanten der Torsion gezeigt. Am Ende dieses Kapitels gibt man einen Ausblick über die *dynamische Eichfeldtheorie*. Als Beispiel werden die dynamischen Feldgleichungen für eine gleichmäßig bewegte Schraubenversetzung untersucht.

# Kapitel 2

## Elastizitätstheorie

### 2.1 Kinematik und Dynamik

In diesem Kapitel möchten wir die kinematischen und dynamischen Größen der Elastizitätstheorie einführen, die für das Verständnis der weiteren Arbeit nötig sind. Man wird die nötigen mathematischen Hilfsmittel zur Herleitung wichtiger Erhaltungssätze behandeln. In der Kontinuumsmechanik wird ein Festkörper als ein Kontinuum aufgefaßt, dessen geometrische Punkte mit dem Ort der materiellen Partikel identifiziert werden. Der Festkörper stellt somit ein mit materiellen Punkten stetig ausgefülltes Kontinuum. Unter einer physikalischen Wirkung verändert das Kontinuum seine Konfiguration. Bei einer elastischen Deformation eines Körpers unterscheidet man zwei Konfigurationen. Der Zustand des Körpers vor der Deformation wird als Bezugskonfiguration bezeichnet. Diesem entspricht nach Ablauf einer Deformation der Zustand der momentanen Konfiguration. Jeder materielle Punkt der Bezugskonfiguration (Ausgangslage) im undeformierten Zustand wird durch den Ortsvektor  $X_i$ ,  $i = 1 \dots 3$  gekennzeichnet. Die aktuelle Lage jedes materiellen Punktes nach der Deformation wird durch die Raumkoordinaten  $x_i$ ,  $i = 1 \dots 3$  beschrieben. Nach der Deformation nimmt jeder materieller Punkt  $X_i$  eine andere räumliche Lage  $x_i$  ein. Wir wählen hier zur Beschreibung beider Konfigurationen ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem. Man bezeichnet den Vektor, der den Ausgangsort mit dem Endort der Lage des materiellen Punktes nach Ablauf der Deformation verbindet als *Verschiebungsvektor*. Er ist durch

$$u_k = x_k - X_k, \quad (2.1)$$

gegeben. Der materielle Punkt bewegt sich im Raum auf einer Bahn, deren Anfang und Endpunkt der Verschiebungsvektor (2.1) verbindet. Bei einer stetigen Konfigurationsänderung, erfährt jeder Punkt des Kontinuums eine in der Zeit kontinuierliche Bewegung. Dieser Bewegungsablauf ist eine Punkttransformation und wird durch die stetig differenzierbare Funktion  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)$  beschrieben. Sie gibt immer den Ort  $\mathbf{x}$  jedes materiellen Punktes  $\mathbf{X}$  zur Zeit  $t$  an, d.h. der materielle Punkt bewegt sich auf einer Bahn gekennzeichnet durch die Funktion  $\hat{\mathbf{x}}$ . Im allgemeinen ist diese Funktion invertierbar, so daß auch die Inverse  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t)$  der Bewegung angegeben werden kann. Sie

beschreibt den Bezugszustand jedes materiellen Punktes als Funktion seiner momentanen Lage zur Zeit  $t$  an. Wie läßt sich die Deformation aus den Bewegungen  $\hat{\mathbf{x}}$  ableiten? Dazu betrachtet man zwei benachbarte, in infinitesimalem Abstand voneinander getrennte materielle Punkte. Sie befinden sich entsprechend in den Bezugszuständen  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ . Durch die einzelnen Bewegungen dieser beiden Punkte im Raum, wird das verbindende Linienelement  $d\mathbf{X}$  eine Translation, Rotation und Längenveränderung erfahren. In der momentanen Konfiguration nehmen die beiden materiellen Punkte entsprechend die Lagen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  ein. Die beiden Linienelemente  $d\mathbf{X}$  und  $d\mathbf{x}$  hängen durch folgende Relation

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X}, \quad \mathbf{F} := \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (2.2)$$

zusammen. Die kinematische Größe  $\mathbf{F}$  heißt *Deformationsgradient* [48, 49]. Für den inversen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}^{-1}$  gilt entsprechend

$$d\mathbf{X} = \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{F}^{-1} := \frac{\partial \hat{\mathbf{X}}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.3)$$

Für eine Starrkörperbewegung gilt  $|d\mathbf{x}| = |d\mathbf{X}|$ , d.h.  $\det \mathbf{F} = 1$ . Dies ist der Fall für eine reine Translation, eine reine Rotation oder eine Starrkörperbewegung. Wir möchten jetzt eine kinematische Größe einführen, die sich während einer Deformation verändert. Dabei startet man mit den Abstandsquadraten

$$ds_0^2 := d\mathbf{X}^2 = G_{ij} dX_i dX_j, \quad ds^2 := d\mathbf{x}^2 = g_{ij} dx_i dx_j, \quad (2.4)$$

der Linienelemente der Bezugskonfiguration und momentanen Konfiguration. Wir möchten für beide Konfigurationen das gleiche orthogonale kartesische Koordinatensystem benutzen. Es gilt für die Metriktensoren  $G_{ij} = g_{ij} = \delta_{ij}$ . Aus der Gl. (2.4) ergibt sich mit den Gln. (2.2) und (2.3) für die Linienelemente  $ds_0^2$  und  $ds^2$

$$ds_0^2 := \delta_{ij} \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial x_l} \frac{\partial \hat{X}_j}{\partial x_m} dx_l dx_m, \quad ds^2 := \delta_{ij} \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial X_l} \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial X_m} dX_l dX_m. \quad (2.5)$$

Mit diesen erhält man die folgenden Differenzen zwischen den Linienelementen in der Bezugskonfiguration und momentanen Konfiguration

$$ds^2 - ds_0^2 := \left( \delta_{ij} - \delta_{lm} \frac{\partial \hat{X}_l}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{X}_m}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j = \left( \delta_{lm} \frac{\partial \hat{x}_l}{\partial X_i} \frac{\partial \hat{x}_m}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) dX_i dX_j, \quad (2.6)$$

$$ds^2 - ds_0^2 := 2 A_{ij} dx_i dx_j = 2 E_{ij} dX_i dX_j. \quad (2.7)$$

Die Tensoren  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$  beschreiben jeweils ein Maß für die Verzerrung in der momentanen Konfiguration und Bezugskonfiguration. Sie heißen entsprechend *Almanischer* und *Greenscher* Verzerrungstensor und sind folgendermaßen definiert:

$$A_{ij} := \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \delta_{lm} \frac{\partial \hat{X}_l}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{X}_m}{\partial x_j} \right), \quad E_{ij} := \frac{1}{2} \left( \delta_{lm} \frac{\partial \hat{x}_l}{\partial X_i} \frac{\partial \hat{x}_m}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right). \quad (2.8)$$



Sie beschreiben beide den gleichen physikalischen Inhalt, nämlich die Abstandsveränderung zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten vor und nach der Deformation. Aus obiger Definition sind die Symmetrien  $A_{ij} = A_{ji}$  und  $E_{ij} = E_{ji}$  ersichtlich. Für eine Starrkörperbewegung zusammengesetzt aus einer globalen Translation und Rotation gilt  $ds_0^2 = ds^2$ , d.h. es ist  $A_{ij} = E_{ij} = 0$ . Aus den Funktionen  $\hat{\mathbf{x}}$  und  $\hat{\mathbf{X}}$  und den Gln. (2.1)–(2.3) ergibt sich für den Deformationsgradienten und seine Inverse

$$F_{ij} = \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial X_j}, \quad F_{ij}^{-1} = \frac{\partial \hat{X}_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}. \quad (2.9)$$

Man setzt die Gl. (2.9) in die beiden Verzerrungstensoren (2.8) ein und bekommt

$$A_{ij} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial x_j} \right), \quad (2.10)$$

$$E_{ij} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial X_i} \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial X_j} \right). \quad (2.11)$$

Werden nur hinreichend kleine Deformationen betrachtet, dann können die Produkte der Verschiebungsgradienten vernachlässigt werden. Weiterhin gilt für den materiellen Verschiebungsgradienten

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial X_j} = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_l} \frac{\partial \hat{x}_l}{\partial X_j} = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_l} \frac{\partial (\hat{u}_l + X_l)}{\partial X_j} = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_l} \left( \frac{\partial \hat{u}_l}{\partial X_j} + \delta_{lj} \right). \quad (2.12)$$

Für kleine Deformationen kann obiges Produkt der Verschiebungsgradienten ebenfalls vernachlässigt werden und man bekommt

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial X_j} = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}. \quad (2.13)$$

Somit bekommt man aus den Gln. (2.10) und (2.11) den infinitesimalen *Cauchyschen Verzerrungstensor*

$$e_{ij} := \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.14)$$

wobei  $,i$  die partielle Ableitung nach den Koordinaten  $x_i$  beschreibt. Das Symbol  $\hat{\phantom{x}}$  steht für eine Funktion da und wird ab jetzt weggelassen. Mit der Linearisierung (2.12) ergibt sich der linearisierte Deformationsgradient

$$F_{ij} = \delta_{ij} + u_{i,j} = \delta_{ij} + \beta_{ij}, \quad \beta_{ij} = u_{i,j}. \quad (2.15)$$

Der Tensor  $\beta_{ij}$  heißt *Distorsionstensor* oder auch linearisierter Verschiebungsgradient. Er läßt sich zerlegen in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil

$$\beta_{ij} = e_{ij} + \omega_{ij}. \quad (2.16)$$

Der symmetrische Anteil  $e_{ij} = \beta_{(ij)}$  ist der Cauchysche Verzerrungstensor (2.14). Der antisymmetrische Anteil  $\omega_{ij} = \beta_{[ij]}$  lautet

$$\omega_{ij} := \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}), \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji}. \quad (2.17)$$

Der Tensor  $\omega_{ij}$  beschreibt eine lokale Starrkörperrotation eines infinitesimalen Volumenelements. Dabei bleiben die Längen der Seiten des infinitesimalen Elements konstant. Zu jedem antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe existiert ein eineindeutiger dualer Axialvektor

$$\omega_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kij} \omega_{ij}, \quad \omega_{ij} = \epsilon_{ijk} \omega_k. \quad (2.18)$$

Kann man für gegebene beliebige Verzerrungen  $e_{ij}$  das Verschiebungsfeld  $u_i$  ausrechnen? Man stellt sich dabei vor der Deformation ein geschlossenes Rechteck mit Seiten infinitesimaler Länge vor. Wird jeder Punkt dieses Rechtecks eineindeutig von der Bezugskonfiguration in die momentane Konfiguration abgebildet, so wird er bei einer *kompatiblen* Deformation am Ende des Deformationsprozesses als abgebildetes Rechteck wieder erscheinen. Anderfalls, d.h. wenn z.B. ein Eckpunkt des Rechtecks sich öffnet und das Verschiebungsfeld dort einen Sprung erleidet, oder aber wenn sich zwei Seiten sich durchdringen sollten, dann liegt eine *inkompatible* Deformation vor. Damit also die Gl. (2.14) nach dem Verschiebungsfeld integriert werden kann, müssen bestimmte Integrabilitätsbedingungen, auch als *Kompatibilitätsbedingungen* bekannt, erfüllt sein. Durch Differentiation der Gl. (2.14) bekommt man

$$e_{ij,kl} = \frac{1}{2} (u_{i,jkl} + u_{j,ikl}). \quad (2.19)$$

Durch Vertauschen der Indizes erhält man [50]

$$e_{kl,ij} = \frac{1}{2} (u_{k,lij} + u_{l,kij}), \quad (2.20)$$

$$e_{jl,ik} = \frac{1}{2} (u_{j,lik} + u_{l,jik}), \quad (2.21)$$

$$e_{ik,jl} = \frac{1}{2} (u_{i,kjl} + u_{k,ijl}), \quad (2.22)$$

Daraus sieht man sofort, daß folgende Beziehung für die Verzerrungen gelten muß

$$R_{iljk} := e_{ik,jl} + e_{jl,ik} - e_{ij,kl} - e_{kl,ij} = 0. \quad (2.23)$$

Der Tensor  $R_{iljk}$  ist der linearisierte *Riemann-Christoffelsche* Krümmungstensor. Er ist ein Tensor vierter Stufe und besitzt die folgende Eigenschaften

$$R_{iljk} = -R_{lijk} = -R_{ilkj} = R_{jkil}. \quad (2.24)$$

Er ist in den ersten zwei und letzten zwei Indizes  $R_{[il][jk]}$  antisymmetrisch. Sein Verschwinden ist die Bedingung (2.23) dafür, daß ein Kontinuum, welches einen dreidimensionalen Euklidischen Raum vor der Deformation darstellt, einen solchen auch nach

der Deformation einnimmt. Da der Riemann-Christoffelsche Krümmungstensor (2.23) nur sechs unabhängige Komponenten besitzt, kann man ihn aus einem symmetrischen Tensor zweiter Stufe gewinnen

$$R_{iljk} = \epsilon_{ilm}\epsilon_{jkn} \eta_{mn}, \quad \eta_{mn} := \epsilon_{mpq}\epsilon_{nrs} e_{qr,ps}. \quad (2.25)$$

Der Tensor  $\eta_{mn}$  ist der linearisierte *Einstein*-Tensor und stellt den Inkompatibilitätstensor dar. Seine Definition (2.25) ist mit der linkseitigen und rechtsseitigen Anwendung des rot-Operators auf den Verzerrungstensor  $e_{ij}$  gegeben. Das Verschwinden von  $\eta_{mn} = 0$  liefert die Kompatibilitätsbedingungen

$$\epsilon_{mpq}\epsilon_{nrs} e_{qr,ps} = 0, \quad (2.26)$$

welche zum ersten Mal von St. Venant [51] angegeben wurden. Die Bedingung (2.26) garantiert auch eine eindeutige stetige Lösung  $u_i$  der Gl. (2.14). Das Verschwinden des Umlaufintegrals

$$\oint_C d\mathbf{u} = 0, \quad (2.27)$$

kennzeichnet das Verschiebungsfeld als eine Zustandsgröße. Mit den eingeführten kinematischen Größen möchten wir die Konstitutivgleichungen für ein lineares, elastisches Kontinuum herleiten. Für die elastisch gespeicherte Energie in der Nähe des Bezugszustandes gilt die Taylor-Reihen Entwicklung

$$W(e_{ij}) = W_0 + \left. \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} \right|_0 + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 W}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} \right|_0 + \dots \quad (2.28)$$

Der Index 0 kennzeichnet den Referenzzustand. Ohne Verlust der Allgemeinheit setzen wir  $W_0 = 0$ . Ein verzerrungsfreier Referenzzustand mit  $e_{ij} = 0$  ist auch spannungsfrei  $\tau_{ij} = 0$ . Somit gilt für die Energiedichte der folgende Ausdruck

$$W(e_{ij}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl}. \quad (2.29)$$

Aus der Energiedichte bekommt man die Cauchysche Spannung

$$\tau_{ij} := \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}, \quad \tau_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}. \quad (2.30)$$

Der *Elastizitätstensor*  $C_{ijkl}$  charakterisiert die elastischen Eigenschaften des Materials und besitzt die Symmetrien  $C_{ijkl} = C_{klij} = C_{ijlk} = C_{jikl}$ . Ein isotroper Tensor vierter Stufe mit den erwähnten Symmetrien besitzt die Form

$$C_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda \delta_{ij}\delta_{kl}. \quad (2.31)$$

Damit ergibt sich aus den Gln. (2.29) und (2.30) die elastisch gespeicherte Energie und die Spannung

$$W = \frac{1}{2} \lambda e_{kk} e_{ll} + \mu e_{ij} e_{ij}, \quad (2.32)$$

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij}, \quad (2.33)$$

eines isotropen Kontinuums. Die Materialkonstanten  $\mu$  und  $\lambda$  heißen Lamésche Konstanten. Der symmetrische Spannungstensor  $\tau_{ij}$  heißt *Cauchyscher Spannungstensor*. Er kann für ein isotropes Material in zwei irreduzible Anteile

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \tau_{ij}^1 + \tau_{ij}^2 \\ &= 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} e_{kk}) + (3\lambda + 2\mu) \frac{1}{3}\delta_{ij} e_{kk} \end{aligned} \quad (2.34)$$

zerlegt werden. Er ist mit den zwei unabhängigen Verzerrungsanteilen

$$e_{ij}^1 = e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} e_{kk} \quad \text{Scherung}, \quad (2.35)$$

$$e_{ij}^2 = \frac{1}{3}\delta_{ij} e_{kk} \quad \text{Dilatation}, \quad (2.36)$$

gegeben. Die Verzerrungstensoren  $e_{ij}^1$  und  $e_{ij}^2$  heißen entsprechend auch Verzerrungsdeviator und Kompressor. Der Deviator beschreibt eine Gestaltänderung bei gleichbleibendem Volumen. Entsprechend wird durch den Kompressor eine reine Dilatation ohne Gestaltänderung beschrieben. Der erste Term  $\tau_{ij}^1$  ist der deviatorische Anteil. Er ist symmetrisch, spurlos und beschreibt die Spannungen aufgrund einer reinen Deformation ohne Volumenänderung. Der zweite Term  $\tau_{ij}^2$  in der irreduziblen Zerlegung (2.34) ist der hydrostatische Spannungsanteil und gibt die Reaktion des Kontinuums auf eine Volumendilatation oder Kompression an. Er verschwindet für ein inkompressibles Medium  $e_{kk} = 0$ . Mit der Zerlegung (2.34) kann die Energiedichte als Summe zweier unabhängiger Terme

$$W = \frac{1}{2} \mu e_{ij}^1 e_{ij}^1 + (\lambda + \frac{2}{3} \mu) e_{ij}^2 e_{ij}^2, \quad (2.37)$$

ausgedrückt werden. Daraus ergibt sich für die positive Definitheit  $W_{el} = \frac{1}{2} \tau_{ij} e_{ij} \geq 0$  der elastischen Verzerrungsenergie [52]:

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0. \quad (2.38)$$

Die erste Ungleichung von (2.38) kann auch mit Hilfe der Poissonschen Querkontraktionszahl  $\nu$  folgendermaßen ausgedrückt werden

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad -1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}. \quad (2.39)$$

Um die Spur des Spannungstensors zu bekommen, verjüngt man das Materialgesetz zwischen Spannungen und Distorsionen mit dem Kronecker Symbol  $\delta_{ij}$ . Dies liefert eine Beziehung für die Spur  $\tau_{kk}$  des Spannungstensors

$$\tau_{kk} = (3\lambda + 2\mu) e_{kk}. \quad (2.40)$$

Um die Bewegungsgleichungen der Elastodynamik zu erhalten, muß die potentielle Energie (2.32) durch den Ausdruck

$$T = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i, \quad (2.41)$$

der kinetischen Energie ergänzt werden. Die Dichte des elastischen Materials wird mit  $\rho$  bezeichnet. Somit kann auch die kanonisch konjugierte Größe zur Geschwindigkeit des Mediums, nämlich der Impuls

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i}, \quad p_i = \rho \dot{u}_i, \quad (2.42)$$

erhalten werden. Man kann jetzt die Lagrangedichte eines isotropen elastischen Mediums angeben

$$\mathcal{L} = T - W, \quad (2.43)$$

mit  $T$  und  $W$  aus den Gln. (2.41) und (2.32). Für die klassische Elastodynamik bekommt man aus der Variation des Wirkungsfunktional

$$S := \int_V \mathcal{L}(\dot{u}_i, u_{i,j}) dV \quad (2.44)$$

mit der Lagrangedichte (2.43) nach dem Verschiebungsvektor  $u_i$  und anschließende Minimierung des Funktional  $\delta S = 0$  die Euler-Lagrange Gln. der Elastodynamik

$$\dot{p}_\alpha - \tau_{\alpha j, j} = 0, \quad \rho \ddot{u}_\alpha - \mu \Delta u_\alpha - (\lambda + \mu) u_{j, j\alpha} = 0. \quad (2.45)$$

Diese werden als dynamische Navier Gln. bezeichnet. Sie sind ein homogenes lineares Gleichungssystem von drei gekoppelten partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung  $\Delta \equiv (\Delta_1, \dots, \Delta_3) = 0$ . Wenn auf das elastische Medium äußere konservative Kräfte wirken, dann können diese aus einem Potential  $V$  abgeleitet werden. Die Lagrangedichte lautet in diesem Fall

$$\mathcal{L} = T - W - V, \quad (2.46)$$

mit den äußeren Kräften gegeben durch

$$F_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial u_\alpha}. \quad (2.47)$$

Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}(u_i, \dot{u}_i, u_{i,j})$  hängt jetzt explizit vom Verschiebungsfeld  $u_i$  ab. Damit erhält man aus Variation nach dem Verschiebungsfeld  $u_i$  die Bewegungsgleichungen

$$\dot{p}_\alpha - \tau_{\alpha j, j} + F_\alpha = 0, \quad \rho \ddot{u}_\alpha - \mu \Delta u_\alpha - (\lambda + \mu) u_{j, j\alpha} + F_\alpha = 0, \quad (2.48)$$

der Elastodynamik mit eingreifenden äußeren Kräften. Die statischen Navier Gln. der Elastostatik ergeben sich aus den Gln. (2.45) und (2.48) für verschwindende Beschleunigung  $\dot{p}_i = \rho \ddot{u}_i = 0$ . Man betrachtet die Gleichgewichtsbilanz ohne den Einfluß äußerer Kräfte, d.h. die Divergenz des Spannungstensors  $\tau_{ij, j} = 0$  muß in jedem Punkt des Kontinuums Null sein. Für diese Gleichung gibt es den folgenden Lösungsansatz

$$\tau_{ij} = \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} \chi_{mn, kl}, \quad (2.49)$$

welcher zum ersten Mal im Jahr 1892 von Beltrami [53] angegeben wurde. Der Tensor  $\chi_{ij}$  wird Tensor der Spannungsfunktionen 2. Ordnung genannt. Seine Komponenten sind die Maxwellschen und Moreraschen Spannungsfunktionen. Wenn die Komponenten  $\chi_{xx} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = 0$  gleich Null gewählt werden, so ergibt sich der Ansatz von Morera [54]. Für die Wahl  $\chi_{ij} = 0$  für  $i \neq j$  bekommt man den Maxwellschen Ansatz [55]. Für ebene Spannungsprobleme wenn alle Komponenten von  $\chi_{ij}$  außer  $\chi_{zz} = f$  verschwinden, erhält man den Ansatz von Airy [56].

Ein *ebenes Spannungsproblem* liegt dann vor, wenn die Komponenten des Spannungstensors  $\tau_{zx} = \tau_{zy} = \tau_{zz} = 0$  verschwinden. Für ein *ebenes Verzerrungsproblem* existiert keine Verschiebung  $u_z = 0$  in  $z$ -Richtung, während die  $x$  und  $y$ -Verschiebungen  $u_x(x, y)$  und  $u_y(x, y)$  eine Unabhängigkeit von der  $z$ -Koordinate aufweisen. Für die Normalspannung  $\tau_{zz}$  in  $z$ -Richtung gilt

$$\tau_{zz} = \nu (\tau_{xx} + \tau_{yy}). \quad (2.50)$$

Für ein zweidimensionales Problem der Elastostatik in der  $xy$ -Ebene [50] bekommt man die Gleichgewichtsbilanzgleichungen

$$\tau_{xx, x} + \tau_{xy, y} + F_x = 0, \quad \tau_{xy, x} + \tau_{yy, y} + F_y = 0, \quad (2.51)$$

mit den Randbedingungen

$$\tau_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y = K_x, \quad \tau_{xy} n_x + \tau_{yy} n_y = K_y, \quad (2.52)$$

wobei  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  die Einheitsnormale auf dem Rand und  $\mathbf{K} = (K_x, K_y)$  die entlang des Randes wirkende Spannungsvektoren darstellen. Die äußeren Kräfte lassen sich aus einem Potential  $V$  nach Gl. (2.47) ableiten. Wir skizzieren kurz einen Lösungsvorgang für das ebene Verzerrungsproblem. Das inverse Hookesche Gesetz lautet

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} \tau_{ij} - \frac{\nu}{2\mu(1+\nu)} \delta_{ij} \tau_{kk}, \quad (2.53)$$

mit dessen Hilfe die Kompatibilitätsbedingungen (2.23) in den Spannungen ausgedrückt werden. Für das ebene Verzerrungsproblem werden fünf von den sechs Kompatibilitätsbedingungen wegen  $u_z = 0$  identisch erfüllt. Die einzige Kompatibilitätsbedingung, die noch übrig bleibt lautet

$$e_{xx, yy} + e_{yy, xx} = 2 e_{xy, xy}, \quad (2.54)$$

welche mit Hilfe des inversen Gesetzes (2.53) sich folgendermaßen in den Spannungen

$$\left(\tau_{yy} - \frac{\nu}{1-\nu}\tau_{xx}\right)_{,xx} + \left(\tau_{xx} - \frac{\nu}{1-\nu}\tau_{yy}\right)_{,yy} = \frac{2}{1-\nu}\tau_{xy,xy}, \quad (2.55)$$

schreiben läßt. Differenziert man entsprechend nach  $x$  die erste und nach  $y$  die zweite Gleichung von (2.51) und addiert sie anschließend zusammen, so erhält man die Beziehung

$$\tau_{xx,xx} + \tau_{yy,yy} - F_{x,x} - F_{y,y} = -2\tau_{xy,xy}. \quad (2.56)$$

Eliminiert man aus den Gln. (2.55) und (2.56) die Variable  $\tau_{xy}$ , dann erhält man

$$\Delta(\tau_{xx} + \tau_{yy}) = -\frac{1}{1-\nu}(F_{x,x} + F_{y,y}). \quad (2.57)$$

Sind die Vektorkomponenten  $K_x$  und  $K_y$  als Randbedingungen auf dem ganzen Rand bekannt, dann lassen sich aus den Gln. (2.51), (2.52) und (2.56) die Spannungen  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$  und  $\tau_{xy}$  und somit auch aus Gl. (2.50)  $\tau_{zz}$  bestimmen. Damit ist es möglich die Spannungen zu bestimmen, ohne etwas über das Verschiebungsfeld  $u_i$  zu wissen. Die linke Seite der Gln. (2.51) erscheint als Divergenz eines Vektors. Man führt die zwei Stromfunktionen  $h$  und  $\chi$  mit

$$\tau_{xx} - V = \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial h}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \tau_{yy} - V = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad (2.58)$$

ein. Man kann die beiden Stromfunktionen  $h$  und  $\chi$  durch folgendes Einsetzen

$$\tau_{xx} - V = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{yy} - V = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (2.59)$$

auf die Airysche-Spannungsfunktion  $f(x, y)$  reduzieren. Durch eine beliebige Funktion  $f(x, y)$  werden nach Gl. (2.59) Spannungen eingeführt, die das Kräftegleichgewicht (2.51) erfüllen. Diese Funktion darf in Wirklichkeit aber nicht beliebig sein, da sie noch die Kompatibilitätsbedingung (2.56) erfüllen muß. Für verschwindende Volumenkräfte lautet diese

$$\Delta\Delta f = 0, \quad (2.60)$$

mit dem Differentialoperator  $\Delta\Delta$  definiert durch

$$\Delta\Delta := \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (2.61)$$

Die Gl. (2.60) stellt eine biharmonische Gleichung für  $f$  dar. Eine reguläre Lösung von dieser Gleichung heißt biharmonische Funktion.

## 2.2 Statische Bilanzgleichungen und Erhaltungsin-tegrale

Wie lassen sich Erhaltungssätze für die Elastizität gewinnen? Dazu betrachtet man zuerst die Elastostatik. Die Euler-Lagrange Gln. schreiben sich mit Hilfe der Lagrangendichte  $\mathcal{L} = -W - V$

$$E_i^u(\mathcal{L}) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,j}} = 0, \quad (2.62)$$

dabei hängt  $\mathcal{L}$  außer der Ableitung  $u_{i,j}$  noch explizit vom Verschiebungsfeld  $u_i$  und den Ortskoordinaten  $x_i$  ab.

### 2.2.1 Das $J_k$ -Integral

Wir möchten jetzt zwei Ableitungen unterscheiden

$$\text{grad } \mathcal{L} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k}, \quad \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} \right)_{\text{expl.}} = \frac{\partial \mathcal{L}(x_m, u_i, u_{i,j})}{\partial x_k} \Big|_{u_i = u_{i,j} = x_m = \text{const.}, m \neq k}. \quad (2.63)$$

Bei der ersten Ableitung nach den Ortskoordinaten  $x_k$  handelt es sich um den Gradienten, der nach der Kettenregel anzuwenden sei, d.h. es wird erst nach den Feldvariablen  $u_i$  und  $u_{i,j}$  und anschließend nach der Koordinate  $x_k$  differenziert. Bei der expliziten Ableitung  $(\cdot)_{\text{expl.}}$  wird nur nach der unabhängigen Koordinate  $x_m$  differenziert. Beide hängen folgendermaßen miteinander

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} u_{i,k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,j}} u_{i,jk} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} \right)_{\text{expl.}} \quad (2.64)$$

zusammen. Die Ableitung auf der linken Seite werden wir als totale Ableitung bezeichnen und mit dem Symbol  $D_k$  kennzeichnen. Dieser totale Operator lautet

$$D_k = \frac{\partial}{\partial u_i} u_{i,k} + \frac{\partial}{\partial u_{i,j}} u_{i,jk} + \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{\text{expl.}}. \quad (2.65)$$

Man eliminiert in Gl. (2.64) den Term  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i}$  aus der Euler-Lagrange-Gl. (2.62) und faßt ihn mit dem zweiten Term in Gl. (2.64) zusammen. Auf der linken Seite schreibt man die Ableitung als

$$D_k \mathcal{L} = D_j (\mathcal{L} \delta_{kj}) \quad (2.66)$$

um. Die explizite Abhängigkeit der Formänderungsenergie von der Lagekoordinate  $x_k$  führt auf die Definition

$$f_k^{\text{inh}} := \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} \right)_{\text{expl.}} = - \left( \frac{\partial W}{\partial x_k} \right)_{\text{expl.}} \quad (2.67)$$



der *Materialkraft* (Inhomogenitätskraft). Damit ergibt sich die folgende Beziehung

$$D_j P_{kj} = -f_k^{\text{inh}}, \quad P_{kj} = \mathcal{L} \delta_{kj} - \frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} u_{i,k} = \mathcal{L} \delta_{kj} - \tau_{ij} u_{i,k}. \quad (2.68)$$

Im Falle, daß es keine äußeren Kräfte  $V = 0$  gibt, erhält man aus der Gl. (2.68) den Tensor

$$P_{kj} = W \delta_{kj} - \frac{\partial W}{\partial u_{i,j}} u_{i,k} = W \delta_{kj} - \tau_{ij} u_{i,k}. \quad (2.69)$$

Der Tensor  $P_{kj}$  ist der kanonische elastische statische Energie-Impulstensor, abgeleitet von der elastischen Formänderungsenergie  $W$ . In dieser Form (2.69) ist er auch als *elastischer Eshelbyscher Spannungstensor* [57, 58, 59] bekannt. Nach Gl. (2.68) verschwindet die Divergenz von  $P_{kj}$  nur wenn keine räumliche Inhomogenität im elastischen Feld vorliegt, also wenn keine explizite Abhängigkeit der elastischen Formänderungsenergie von den Ortskoordinaten  $x_k$  vorliegt. Ist diese Inhomogenität vorhanden, dann verschwindet die Divergenz des Eshelbyschen Spannungstensors nicht. In der Arbeit [57] wird die Kraft auf eine elastische Inhomogenität in einem Kontinuum mit Hilfe der klassischen Elastizitätstheorie bestimmt. Diese Kraft läßt sich durch Raumintegration aus der Divergenz des Eshelbyschen Spannungstensors als

$$F_k := \int_V D_j P_{kj} dV = \int_S P_{kj} n_j dS \quad (2.70)$$

angeben. Bei der obigen Integration wurde mit Hilfe des Gaußschen Satzes das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral umgewandelt. Wählt man eine geschlossene Oberfläche im 3-dimensionalen Raum, welche die Inhomogenität umschließt, so läßt sich durch Integration des Eshelbyschen-Spannungstensors über diese Oberfläche die eingreifende Kraft  $F_k$  bestimmen.  $n_j$  beschreibt dabei die Einheitsnormale auf der Oberfläche. Die Wahl der Oberfläche ist dabei beliebig, Hauptsache sie umschließt die Inhomogenität. Das Integral (2.70) ist wegunabhängig ("path independent"). In den sechziger Jahren haben Sanders [60], Cherepanov [61] und Rice [62, 13] die Bedeutung von (2.70) für die Energiefreisetzungsrate von Rissen erkannt. Angewandt auf das ebene Problem eines Risses, ist für das Integral (2.70) eine geschlossene zweidimensionale Kontur zu wählen, welche die Rißspitze umläuft. Für das wegunabhängige Oberflächenintegral und Randintegral (2.70) wird seit Rice der Begriff  *$J_k$ -Integral* verwendet. Somit ist die Kraft auf den Defekt  $F_k = J_k$  gleich mit

$$J_k := \int_S P_{kj} n_j dS = \int_S (W n_k - \tau_{ij} n_j u_{i,k}) dS \quad (2.71)$$

zu setzen. Erste Anwendungen des zweidimensionalen wegunabhängigen  $J_k$ -Integrals auf die Spitze von Rissen findet man in den Arbeiten von Rice und Hutchinson [13, 63, 64]. Sind keine Quellen von inneren Spannung vorhanden, dann gilt der *lokale Erhaltungssatz*

$$D_j P_{kj} = 0. \quad (2.72)$$

Umschließt die Oberfläche  $S$  ein homogenes, defektfreies Material, dann verschwindet das Oberflächenintegral (2.71)

$$J_k = 0. \quad (2.73)$$

Die Gl. (2.73) ist eine *integrale Erhaltungsgröße*. Aus der Gl. (2.68) bedeutet die lokale Bilanzgl. (2.72) auch

$$f_k^{\text{inh}} = -\left(\frac{\partial W}{\partial x_k}\right)_{\text{expl.}} = 0 \quad \Rightarrow \quad W(u_i, u_{i,j}), \quad (2.74)$$

d.h. die explizite Unabhängigkeit der elastischen Formänderungsenergie von der Ortskoordinate.

### 2.2.2 Das $L_k$ -Integral

Man betrachtet jetzt als Ausgangsgröße das "Moment" der Lagrange-Dichte  $\mathcal{L} = -W - V$  und bildet davon die Rotation

$$\text{rot}(\mathcal{L}\mathbf{x}) \equiv \epsilon_{ikj} \frac{\partial(\mathcal{L}x_j)}{\partial x_k} = \epsilon_{ikj} \left[ \frac{\partial(\mathcal{L}x_j)}{\partial u_m} u_{m,k} + \frac{\partial(\mathcal{L}x_j)}{\partial u_{m,n}} u_{m,nk} + \left(\frac{\partial(\mathcal{L}x_j)}{\partial x_k}\right)_{\text{expl.}} \right]. \quad (2.75)$$

Unter Benutzung der Euler-Lagrange Gl. (2.62) eliminiert man die Ableitung nach der Feldvariable  $u_m$  und faßt die ersten zweite Terme auf der rechten Seite zusammen. Anschließend bringt man das Resultat auf die linke Seite, so daß nur noch die explizite Ableitung nach  $x_k$  auf der rechten Seite übrig bleibt

$$\epsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial(\mathcal{L}x_j)}{\partial x_k} - (\tau_{mn} x_j u_{m,k})_{,n} + \tau_{mj} u_{m,k} \right] = \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial W}{\partial x_k}\right)_{\text{exp.}} x_j = \epsilon_{ijk} (-x_j f_k^{\text{inh}}). \quad (2.76)$$

Der letzte Term auf der linken Seite ergibt durch die partielle Integration. Bringt man diesen auf die rechte Seite und addiert zusätzlich auf beiden Seiten den Term  $\epsilon_{ijk} \tau_{mk} u_{j,m}$  so ergibt sich

$$\epsilon_{ijm} D_k \left[ x_j (\mathcal{L} \delta_{mk} - \tau_{nk} u_{n,m}) + u_j \tau_{mk} \right] = \epsilon_{ijk} [-x_j f_k^{\text{inh}} - u_j F_k - (\tau_{mj} u_{m,k} - \tau_{mk} u_{j,m})]. \quad (2.77)$$

Man erkennt in den ersten zwei Termen auf der linken Seite obiger Gl. den Eshelbyschen Spannungstensor (2.68). Man führt den folgenden Tensor

$$M_{ik} := \epsilon_{ijm} (x_j P_{mk} + u_j \tau_{mk}), \quad (2.78)$$

ein und bezeichnet ihn als den Drehimpulstensor der Elastizität. Er ist als Summe von zwei Anteilen

$$M_{ik} = M_{ik}^{(o)} + M_{ik}^{(i)}, \quad M_{ik}^{(o)} = \epsilon_{ijm} x_j P_{mk}, \quad M_{ik}^{(i)} = \epsilon_{ijm} u_j \tau_{mk}, \quad (2.79)$$

gegeben. Den ersten Term auf der rechten Seite der Gl. (2.78) bezeichnet man als äußeren, *orbitalen Drehimpulstensor*. Der zweite Term stellt den inneren Drehimpulstensor dar. Mit dem Drehimpulstensor (2.78) schreibt sich die Bilanzgleichung (2.77) folgendermaßen

$$D_k M_{ik} = \epsilon_{ijk} (-x_j f_k^{\text{inh}} - u_j F_k + \tau_{mk} u_{j,m} - \tau_{mj} u_{m,k}). \quad (2.80)$$

Im Fall eines homogenen Materials ist wie erwähnt die explizite Abhängigkeit der Verzerrungsenergie nach der Lagekoordinate gleich Null und somit auch die Materialkraft. Wirken keine äußere Volumenkräfte so entfällt auch der zweite Term in der Gl. (2.80). Aus dem isotropen Konstitutivgesetz (2.34) für den Causchyschen Spannungstensor  $\tau_{ij}$  erhält man für die rechte Seite der Gl. (2.80) die sogennante *Isotropiebedingung*

$$\epsilon_{ijk} (\tau_{mk} u_{j,m} - \tau_{mj} u_{m,k}) = 0. \quad (2.81)$$

Somit ergibt sich aus der Bilanzgleichung (2.80) der lokale Erhaltungssatz des Drehimpulses

$$D_k M_{ik} = 0. \quad (2.82)$$

Aus der Divergenz des Drehimpulstensors (2.80) ergibt sich durch Volumenintegration mit Hilfe des Gaußschen Satzes das  $L_i$ -Integral

$$L_i := \int_S M_{ik} n_k \, dS = \int_S \epsilon_{ijm} (x_j P_{mk} + u_j \tau_{mk}) n_k \, dS. \quad (2.83)$$

Für ein isotropes Material verschwindet das Drehmoment und man erhält den globalen Erhaltungssatz des Drehimpulses

$$L_i = 0. \quad (2.84)$$

### 2.2.3 Das $M$ -Integral

Eine dritte Bilanzgleichung kann gewonnen werden, wenn die Divergenz des Lagrange-schen Momentes

$$\text{div}(\mathcal{L}\mathbf{x}) \equiv \frac{\partial(\mathcal{L}x_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial(\mathcal{L}x_k)}{\partial u_m} u_{m,k} + \frac{\partial(\mathcal{L}x_k)}{\partial u_{m,i}} u_{m,ik} + \left( \frac{\partial(\mathcal{L}x_k)}{\partial x_k} \right)_{\text{expl.}}, \quad (2.85)$$

in Betracht gezogen wird. Die Rechnung verläuft analog zu den oben behandelten zwei Fällen. Die Ableitung  $x_{k,k} = \delta_{kk} = n$  ist gleich mit der räumlichen Dimension  $n$ . Das Ergebnis lautet

$$D_i \left( x_k P_{ki} - \frac{n-2}{2} \tau_{mi} u_m \right) = -x_k f_k^{\text{inh}} + x_k \frac{n-2}{2} F_k, \quad (2.86)$$

Man führt den Vorfaktor  $d_u := -\frac{n-2}{2}$  ein und definiert den Skalierungsstrom

$$Y_i := x_k P_{ki} + d_u u_k \tau_{ki}. \quad (2.87)$$

Damit läßt sich die Bilanzgleichung (2.86) in die Form

$$D_i Y_i = -x_k f_k^{\text{inh}} - d_u x_k F_k, \quad (2.88)$$

bringen. Sollte die Arbeit der Materialkraft und der äußeren Volumenkraft auf der rechten Seite der Bilanzgl. (2.88) verschwinden, so erhält man den lokalen Erhaltungssatz des Skalierungsstromes

$$D_i Y_i = 0. \quad (2.89)$$

Aus einer Volumenintegration und unter Benutzung des Gaußschen Satzes läßt sich daraus das sogenannte  $M$ -Integral

$$M := \int_S Y_i n_i \, dS = \int_S (x_k P_{ki} + d_u \tau_{mi} u_m) n_i \, dS, \quad (2.90)$$

als neue globale Größe gewinnen. Der integrale Erhaltungssatz lautet in diesem Fall

$$M = 0. \quad (2.91)$$

Diese drei hergeleitete Ergebnisse können auch als *kontinuierliche Symmetrien* verstanden werden. Betrachtet man z.B. den einfachsten Fall der Translation gegeben durch die infinitesimale Transformation

$$x'_k = x_k + \epsilon_l \delta_{lk}, \quad u'_i(x'_k) = u_i(x_k), \quad (2.92)$$

so sagt Gl. (2.74) nichts weniger aus, als daß obige Transformation das 'Objekt' der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(u_i(x_k), u_i(x_k)_{,j}) = \mathcal{L}'(u'_i(x'_k), u'_i(x'_k)_{,j'}), \quad (2.93)$$

invariant läßt. Die Transformation (2.92) beschreibt eine Translation der Ortskoordinaten  $x_k$  und die Invarianz (2.93) der Lagrangedichte bezüglich der Translation (2.92) drückt die Homogenität des elastischen Materials aus. Man sieht hier, daß die gewählte Form der Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  für den gefundenen lokalen (2.72) und globalen Erhaltungssatz (2.73) verantwortlich ist. Die bekannte Transformation (2.92) läßt die Lagrangedichte invariant und damit bleibt auch das Wirkungsfunktional (2.44) unter dieser Transformation

$$S := \int_{V'} \mathcal{L}(u'_i, u'_{i,j'}) \, dV' = \int_V \mathcal{L}(u_i, u_{i,j}) \, dV \quad (2.94)$$

unverändert. Die Transformation (2.92) läßt das Wirkungsfunktional (2.94) invariant und ist somit eine *Variationssymmetrie*. Diese Symmetrie ist also der Grund für den lokalen und somit auch den globalen Erhaltungssatz. Dieses Prinzip läßt sich verallgemeinern. Man möchte dazu alle Transformationen der Art

$$x'_k = x'_k(x_l, u_l, \epsilon_l), \quad u'_i = u'_i(x_l, u_l, \epsilon_l), \quad (2.95)$$

wissen, welche das Wirkungsfunktional (2.94) invariant lassen. Aus jeder einzelnen Variationssymmetrie kann dann ein lokaler Erhaltungssatz und somit auch durch Integration ein integraler Erhaltungssatz gewonnen werden. Diese Korrespondenz zwischen Variationssymmetrien und Erhaltungssätzen wurde in der Dissertationsschrift von Emmy Noether [25] in ihrem bekannten Noetherschen Theorem bewiesen. In der theoretischen Physik wurden als erstes mit Hilfe des Noetherschen Theorems die Erhaltungssätze der Elektrodynamik von E. Bessel-Hagen [26] hergeleitet. Ist das 'Objekt', welches die Transformationen (2.95) invariant lassen, nicht das Wirkungsfunktional (2.94), sondern die Euler-Lagrange Gln. (2.45) mit  $\dot{u}_i = 0$  für die statischen Navier Gln., dann spricht man von den kontinuierlichen Symmetrien dieser Gleichungen. Im allgemeinen unterscheidet sich die Anzahl der Variationssymmetrien und der Euler-Lagrange Symmetrien. Sie ist nicht gleich. Es gilt aber immer daß jede Variationssymmetrie auch eine Symmetrie der Euler-Lagrange Gln. darstellt. Andererseits braucht nicht jede Euler-Lagrange Symmetrie eine Variationsymmetrie zu sein [32].

Im Fall der Elastostatik wurden zum ersten Mal alle Transformationen (2.95), Variationssymmetrien (2.94) und entsprechende Erhaltungssätze von Günther [29] angegeben. Die hergeleitete Erhaltungsgrößen wurden von ihm für Biege und Torsionsprobleme von Balken und Platten angewandt. Einen mathematisch strengeren Zugang zu den Erhaltungssätzen der linearen und endlichen Elastostatik beschafften sich Knowles und Sternberg [30]. Die Erhaltungssätze der linearen Elastodynamik wurden zum ersten Mal von Morse und Feshbach [65] und Fletcher [31] angegeben.

## 2.3 Lie-Punkt Symmetrien

Wir starten wieder dort, wo wir im letzten Abschnitt aufgehört haben. Wir suchen also allgemeine Transformationen für die unabhängigen  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  und abhängigen  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$  Variablen von der Form

$$x'_k = x'_k(x_l, u_l, \varepsilon_l), \quad u'_i = u'_i(x_l, u_l, \varepsilon_l), \quad (2.96)$$

die ein System von partiellen Differentialgleichungen forminvariant lassen. Die Transformationen (2.96) heißen auch *Punkttransformationen*, weil durch sie im Raum der Variablen  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  eine eindeutige Punktabbildung

$$(x_k, u_k) \rightarrow (x'_k, u'_k), \quad (2.97)$$

realisiert wird. Hängen  $(x'_k, u'_k)$  noch von den ersten Ableitungen

$$x'_k = x'_k(x_l, u_l, x_{l,m}, u_{l,m}, \varepsilon_l), \quad u'_i = u'_i(x_l, u_l, x_{l,m}, u_{l,m}, \varepsilon_l), \quad (2.98)$$

ab, dann spricht man von einer *Kontakttransformation*. Werden in der Kontakttransformation Ableitungen von immer höherer Ordnung zugelassen

$$x'_k = x'_k(x_l, u_l, x_{l,m}, u_{l,m}, \dots, \varepsilon_l), \quad u'_i = u'_i(x_l, u_l, x_{l,m}, u_{l,m}, \dots, \varepsilon_l), \quad (2.99)$$

dann werden verallgemeinerte Transformationen untersucht. Man nennt sie auch *Lie-Bäcklund Transformationen*. Die Punkttransformation (2.96) bildet eine Gruppe. Der Parameter  $\varepsilon_l \in \mathbb{R}$  ist kontinuierlich und wird als *Gruppenparameter* bezeichnet. Somit stellt (2.92) für jede Translationsrichtung eine einparametrische kontinuierliche Transformationsgruppe. Man möchte die 'Objekte' wissen, die unter der Transformationsgruppe (2.96) forminvariant bleiben. Im letzten Abschnitt haben wir uns als einfachstes Beispiel die Translationsgruppe (2.92) betrachtet. Wir stellten fest, daß falls die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}'(x'_k, u'_k) = \mathcal{L}'(x_k + \varepsilon_l \delta_{lk}, u_k) = \mathcal{L}(x_k, u_k), \quad (2.100)$$

unter der Translationsgruppe forminvariant  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$  bleibt, dann wird die Translationsgruppe für  $\mathcal{L}$  zu einer Symmetriegruppe. Man sagt auch, daß  $\mathcal{L}$  unter der Gruppentransformation (2.92) global invariant ist, wenn für alle Werte des Gruppenparameters  $\varepsilon_l$  die Symmetrie (2.100) gilt. Da diese Symmetrie aus einer Punkttransformation mit einem kontinuierlichen Gruppenparameter hervorgegangen ist und Sophus Lie sich als erster damit befasste, heißt sie auch *Lie-Punkt Symmetriegruppe*. Ab jetzt wird ihr das Symbol  $G$  zugeordnet.

Für die statischen Navier Gln. gilt  $n = p = 3$ . Wir möchten dieses System aus drei linearen partiellen Differentialgleichungen mit

$$\Delta(x_i, u_i, u_{i,j}, u_{i,jk}) = 0, \quad (2.101)$$

bezeichnen. Wir vernachlässigen die äußeren Volumenkräfte und wählen ein unendlich großes elastisches Kontinuum. Wir suchen nach der Lie-Punkt Symmetriegruppe  $G$  im Raum  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ . Diese besteht aus der Punkttransformation (2.96), die das Gleichungssystem (2.101) forminvariant läßt. Es gilt  $\Delta = \Delta' = 0$ , d.h. das forminvariante 'Objekt' ist jetzt das Differentialgleichungssystem  $\Delta$ . Die Lie-Gruppe  $G$  ist nur dann eine Lie-Punkt Symmetrie, wenn sie jede Lösungskurve  $\mathbf{u} = f(\mathbf{x})$  von (2.101) in eine andere Lösungskurve  $\mathbf{u}' = f'(\mathbf{x}')$  abbildet, so daß die gesamte Lösungsschar unverändert bleibt, d.h. das Lösungsschar-Bild bleibt dabei erhalten. Wir wählen jetzt nur eine unabhängige und abhängige Variable also das zweidimensionale Tupel  $(x, u)$  um die weitere mathematische Methoden einfachheitshalber anschaulich zu machen. Wir werden später nochmal die dreidimensionale Situation schildern. Aus (2.96) bekommt man die zweidimensionale Punkttransformation

$$x' = x'(x, u, \varepsilon), \quad u' = u'(x, u, \varepsilon). \quad (2.102)$$

Man kann die Punkttransformation (2.102) in der  $xu$ -Ebene in einer Taylorreihe in Abhängigkeit vom Gruppenparameter  $\varepsilon$  um die Stelle  $\varepsilon = 0$  darstellen

$$x' = x + \varepsilon \left. \frac{\partial x'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left. \frac{\partial^2 x'}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} + \cdots = x + \varepsilon X(x, u) + O(\varepsilon^2), \quad (2.103)$$

$$u' = u + \varepsilon \left. \frac{\partial u'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left. \frac{\partial^2 u'}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} + \cdots = u + \varepsilon U(x, u) + O(\varepsilon^2). \quad (2.104)$$

Wenn man alle Glieder ab zweiter Ordnung  $O(\epsilon^2)$  in  $\epsilon$  in den beiden Taylorentwicklungen (2.103) und (2.104) vernachlässigt, so bekommt man aus der Gruppentransformation (2.96) die obige *infinitesimale Transformation*. Die Komponenten  $X$  und  $U$  der infinitesimalen Transformation lauten

$$X(x, u) := \left. \frac{\partial x'}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}, \quad U(x, u) := \left. \frac{\partial u'}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}. \quad (2.105)$$

Während der Gruppenparameter  $\epsilon$  vom Wert  $\epsilon = 0$  im Punkt  $(x, u)$  kontinuierlich ansteigt, beschreibt die Punkttransformation (2.102) eine Kurve im Raum  $(x, u) \in \mathbb{R}^2$ . Der Vektor  $(X, U)$  ist der Tangentenvektor an dieser Kurve an der Stelle  $(x, u)$  für  $\epsilon = 0$ . Deswegen heißt  $(X, U)$  auch das Tangentialvektorfeld der Gruppe  $G$ . Aus der infinitesimalen Transformation (2.103) und (2.104) ergibt sich die einparametrische globale Transformation (2.102) durch das Lösen des Anfangswertproblems

$$\frac{dx'}{d\epsilon} = X(x', u'), \quad x'|_{\epsilon=0} = x, \quad (2.106)$$

$$\frac{du'}{d\epsilon} = U(x', u'), \quad u'|_{\epsilon=0} = u. \quad (2.107)$$

Das Tangentialvektorfeld  $(X, U)$  läßt sich als Differentialoperator erster Ordnung

$$\mathbf{v} = X(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + U(x, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (2.108)$$

schreiben. Man bezeichnet ihn als *infinitesimalen Erzeuger* der Gruppe  $G$ . Wendet man den infinitesimalen Erzeuger auf die Funktion  $f(x, u)$  für den einfachsten Fall der eindimensionalen Translationengruppe  $x' = x + \epsilon$ ,  $u' = u$  an, so ergibt sich aus den Gln. (2.103), (2.104), (2.105), und (2.108) die Unabhängigkeit

$$\mathbf{v}f = \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \text{mit} \quad X(x, u) = 1, \quad U(x, u) = 0, \quad (2.109)$$

der Funktion  $f(x, u) = h(u)$  von der Koordinate  $x$ . Für eine Translationssymmetrie muß also  $f'(x', u') = f(x, u) = h(u)$  gelten. Eine andere geläufige Transformation ist die einparametrische Skalierungsgruppe  $x' = \epsilon x$ ,  $u' = \epsilon u$ . Für diese Transformation folgt

$$\mathbf{v}f = x \frac{\partial f}{\partial x} + u \frac{\partial f}{\partial u} = 0, \quad \text{mit} \quad X(x, u) = x, \quad U(x, u) = u. \quad (2.110)$$

Die partielle Differentialgleichung (2.110) kann mit Hilfe der Charakteristiken gelöst werden. Die Lösung lautet  $f'(x', u') = f(x, u) = h(u/x)$ . Wie man leicht sieht, wurden in den beiden Fällen der Translationssymmetrie und Skalierungssymmetrie die explizite Abhängigkeit der Funktion  $f$  von den Argumenten um eins reduziert. Diese Tatsache gilt für alle Symmetriegruppen von  $f$ . Wie lassen sich die Symmetriegruppen auf Funktionen  $f(x, u, du/dx)$  anwenden? Hängt die Funktion  $f$  noch zusätzlich von der ersten Ableitung ab, dann wird nach einem erweiterten Vektorfeld von (2.108) in der Form

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{v} = X(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + U(x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \bar{U}(x, u, u_{,x}) \frac{\partial}{\partial u_{,x}}, \quad (2.111)$$

gesucht. Für die erste Ableitung wurde  $du/dx = u_{,x}$  gesetzt. Dieser in dem dreidimensionalen Raum  $(x, u, u_{,x}) \in \mathbb{R}^3$  wirkende Operator heißt die erste Prolongation des infinitesimalen Erzeugers (2.108). Wie kann man die Komponente  $\bar{U}(x, u, u_{,x})$  bestimmen? Unter der Transformation (2.102) soll die Kontaktbedingung

$$du = u_{,x} dx, \quad du' = u'_{,x'} dx', \quad (2.112)$$

weiterhin gelten, d.h. sie soll in den gestrichelten Koordinaten ihre Form behalten. Für die Differentiale gilt mit der Transformation (2.102)

$$du' = du'(x, u, \varepsilon) = \frac{\partial u'}{\partial x} dx + \frac{\partial u'}{\partial u} du, \quad (2.113)$$

$$dx' = dx'(x, u, \varepsilon) = \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial u} du. \quad (2.114)$$

Setzt man die Differentiale (2.113) und (2.114) in die zweite Gl. von (2.112) ein und substituiert anschließend das Differential  $du$  aus der ersten Gl. von (2.112), so erhält man

$$u'_{,x'} = u'_{,x'}(x, u, u_{,x}, \varepsilon) = \frac{\frac{\partial u'}{\partial x} + u_{,x} \frac{\partial u'}{\partial u}}{\frac{\partial x'}{\partial x} + u_{,x} \frac{\partial x'}{\partial u}}. \quad (2.115)$$

Für den Quotienten (2.115) gilt  $D_x u'$  für den Zähler und  $D_x x'$  für den Nenner. Sie sind entsprechend die totalen Ableitungen der Funktionen  $u'(x, u, \varepsilon)$  und  $x'(x, u, \varepsilon)$ . Entwickelt man die linke Seite der Gl. (2.115) in einer Taylorreihe bis zur ersten Ordnung  $O(\varepsilon)$  um die Stelle  $\varepsilon = 0$  so erhält man die infinitesimale Transformation der Ableitung

$$u'_{,x'} = u_{,x} + \varepsilon \bar{U}(x, u, u_{,x}). \quad (2.116)$$

Auf der rechten Seite von (2.115) setzt man die infinitesimale Transformation (2.103) und (2.104) in den Quotienten (2.115) ein. Durch Vergleich beider Seiten bekommt man

$$\bar{U}(x, u, u_{,x}) = D_x U - u_{,x} D_x X = D_x(U - Xu_{,x}) + Xu_{,xx}. \quad (2.117)$$

Der Term in der Klammer heißt *Charakteristik*

$$Q^u := U - Xu_{,x}. \quad (2.118)$$

Damit läßt sich die Komponente  $\bar{U}$  auch als

$$\bar{U}(x, u, u_{,x}) = D_x Q^u + Xu_{,xx}, \quad (2.119)$$

schreiben. Die totale Ableitung  $D_x$  lautet

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} u_{,x} + \frac{\partial}{\partial u_{,x}} u_{,xx} + \dots \quad (2.120)$$



Setzt man die Gl. (2.119) in das erste Prolongationsfeld (2.111) ein und berücksichtigt die totale Ableitung (2.120) so ergibt sich schließlich

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{v} = Q^u \frac{\partial}{\partial u} + D_x Q^u \frac{\partial}{\partial u_{,x}} + X D_x = \text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_Q + X D_x, \quad (2.121)$$

mit der Definition für das Vektorfeld  $\mathbf{v}_Q$  und seine erste Prolongation

$$\mathbf{v}_Q := Q^u \frac{\partial}{\partial u}, \quad \text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_Q = Q^u \frac{\partial}{\partial u} + D_x Q^u \frac{\partial}{\partial u_{,x}}. \quad (2.122)$$

Diese Rechnung für den ersten Prolongationsoperator  $\text{pr}^{(1)}\mathbf{v}$  läßt sich problemlos bis zur  $n$ -ter Ordnung  $\text{pr}^{(n)}\mathbf{v}$  fortsetzen [32]

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{v} = \text{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q + X D_x. \quad (2.123)$$

Wir möchten hier wieder den Fall mehrerer abhängiger und unabhängiger Variablen aufnehmen und uns die Resultate für die infinitesimale Transformation (2.103), (2.104), den infinitesimalen Erzeuger (2.108) und die Prolongationsformel (2.111) für diesen Fall anschauen [21, 22, 24, 32]. Die infinitesimale Transformationsgruppe lautet jetzt

$$x'_k = x_k + \varepsilon X_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \cdots, \quad (2.124)$$

$$u'_i = u_i + \varepsilon U_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \cdots, \quad (2.125)$$

mit den Komponenten des infinitesimalen Erzeugers von  $G$  gegeben durch

$$X_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := \left. \frac{\partial x'_k}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad U_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := \left. \frac{\partial u'_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (2.126)$$

Für die einzelnen Indizes gilt  $k = 1, \dots, n$  und  $i = 1, \dots, p$ . Der infinitesimale Erzeuger  $\mathbf{v}$  von  $G$  ist entsprechend durch

$$\mathbf{v} = X_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x_k} + U_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad (2.127)$$

gegeben. Man kann die erste Prolongation

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \bar{U}_{ij} \frac{\partial}{\partial u_{i,j}} \quad (2.128)$$

und die zweite Prolongation von  $\mathbf{v}$

$$\text{pr}^{(2)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \bar{U}_{ij} \frac{\partial}{\partial u_{i,j}} + \bar{U}_{ijl} \frac{\partial}{\partial u_{i,jl}} \quad (2.129)$$

berechnen. Die Komponenten des zweiten Prolongationsvektorfeldes (2.129) bestimmen sich zu

$$\bar{U}_{ij} = D_j(U_i - X_k u_{i,k}) + X_k u_{i,kj}, \quad (2.130)$$

$$\bar{U}_{ijl} = D_l D_j(U_i - X_k u_{i,k}) + X_k u_{i,kjl}. \quad (2.131)$$

Für die Charakteristik (2.118) bekommt man im Fall mehrerer abhängiger und unabhängiger Variablen

$$Q_i^u = U_i - X_k u_{i,k}. \quad (2.132)$$

Damit läßt sich die zweite Prolongation (2.129) ähnlich wie im zweidimensionalen Fall nach der allgemeinen Prolongationsformel (2.123) für  $n = 2$  als

$$\text{pr}^{(2)}\mathbf{v} = \text{pr}^{(2)}\mathbf{v}_Q + X_k \mathbf{D}_k, \quad (2.133)$$

umschreiben.

Ist es möglich alle Lie-Punkt-Symmetrien des Systems (2.101) anstatt mit den kontinuierlichen globalen Transformation (2.96) mit Hilfe der infinitesimalen Transformationen (2.103) und (2.104) zu bestimmen? Die Antwort zu dieser wichtigen Frage gab Sophus Lie [16]. Er zeigte, daß die nichtlineare Bedingungsgleichungen für die Invarianz  $\Delta = \Delta'$ , welche sich aus den Transformationen (2.96) ergeben, sich enorm vereinfachen, wenn dafür die infinitesimale Transformation (2.124) und (2.125) in Betracht gezogen wird. Dadurch werden nämlich die Invarianzbedingungen linear und alle Lie-Punkt Symmetrien lassen sich immer noch bestimmen. Das System (2.101) der Navier-Gleichungen kann als eine Hyperfläche im höher dimensionalen Raum  $((x_i, u_i, u_{i,j}, u_{i,jk}) \in \mathbb{R}^{36})$  interpretiert werden. Die Lie-Punkt Symmetrien dieser Hyperfläche lassen sich aus folgender Bedingung [32]

$$\text{pr}^{(2)}\mathbf{v}(\Delta) = 0, \quad \text{mit} \quad \Delta = 0, \quad (2.134)$$

berechnen, d.h. die Lie-Gruppe  $G$  ist dann und nur dann eine Symmetriegruppe von  $\Delta$ , wenn für jeden infinitesimalen Erzeuger  $\mathbf{v}$  von  $G$  das *infinitesimale Kriterium* (2.134) erfüllt wird. Aus diesem Kriterium bekommt man ein lineares System aus partiellen Differentialgleichungen für die unbekannten Komponenten  $X_k(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  und  $U_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$

$$\left[ (\mu + \lambda) \bar{U}_{li} + \mu \bar{U}_{il} \right]_{\Delta=0} = 0. \quad (2.135)$$

Für die statischen Navier Gln. erhält man die Lösung [28]

$$X_k = d_k + \epsilon_{kjl} x_j a_l + dx_k, \quad (2.136)$$

$$U_i = cu_i + \epsilon_{ijl} u_j a_l + f_i(x), \quad (2.137)$$

mit  $d_k$ ,  $a_l$ ,  $d$  und  $c$  als beliebige Parameter. Die Funktionen  $f_i(x)$  sind beliebige Lösungen der statischen Navier Gln. Damit sind also die infinitesimalen Erzeuger welche die Navier Gln. invariant lassen bekannt. Setzt man die Komponenten (2.136) und (2.137) in den infinitesimalen Erzeuger (2.127) ein und fasst die Terme mit den gleichen Parameter zusammen, so setzt sich das tangentielle Vektorfeld  $\mathbf{v}$  aus mehreren linear unabhängigen Vektorfelder

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2 + \mathbf{v}^3 + \mathbf{v}^4 + \mathbf{v}^5 \quad (2.138)$$

zusammen. Alle diese Lie-Vektorfelder der infinitesimalen Symmetrien der Feldgleichungen spannen die *Lie-Algebra* auf. Sie lauten

$$v_i^1 = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{Translation im Raum}), \quad (2.139)$$

$$v_i^2 = \epsilon_{ijk} \left( x_j \frac{\partial}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial}{\partial u_k} \right) \quad (\text{Drehung im Raum}), \quad (2.140)$$

$$v^3 = x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (\text{Skalierung im Raum}), \quad (2.141)$$

$$v^4 = u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \quad (\text{Skalierung der Verschiebung}). \quad (2.142)$$

Das Lie-Vektorfeld der Translation  $\mathbf{v}^1 = (v_x^1, v_y^1, v_z^1)$  setzt sich aus den in den drei Koordinatenrichtungen  $x, y, z$  unabhängigen Translationen. Das Lie-Vektorfeld der Rotation  $\mathbf{v}^2 = (v_x^1, v_y^1, v_z^1)$  enthält die in den drei Koordinatenebenen  $xy, xz, yz$  unabhängig stattfindende Drehungen. Die Lie-Vektorfelder  $v^3$  und  $v^4$  beschreiben entsprechend die Skalierung im Raum der unabhängigen Ortsvariablen und des abhängigen Verschiebungsfeldes. Somit bildet die achtparametrische Lie-Punkt-Gruppe (2.136) und (2.137) eine Symmetrie für die statischen Navier Gln. Somit ist auch die 8-dimensionale Lie-Algebra mit den Lie-Vektorfeldern (2.139)–(2.142) gegeben. Zusätzlich zur Lie-Algebra existiert noch die lineare Symmetrie

$$\mathbf{v}_f = f_i(x) \frac{\partial}{\partial u_i} \quad (\text{Addition von Lösungen}), \quad (2.143)$$

welche nur wegen der Linearität der Navier Gln. in Erscheinung tritt. Sie drückt das Superpositionsprinzip für lineare Differenzialgleichungen aus. Für nichtlineare Differenzialgleichungen gibt es diese Symmetrie nicht. Olver [28] fand für die Bedingung  $7\mu + 3\lambda = 0$  zwischen den Laméschen Konstanten eine erweiterte Lie-Algebra. Als Ergänzung zu den Lie-Vektorfeldern (2.139)–(2.142) kommt die spezielle konforme Lie-Gruppe

$$v_i^5 = x_l x_l \frac{\partial}{\partial x_i} - 2 x_i x_l \frac{\partial}{\partial x_l} + (x_i u_j - 2 x_j u_i) \frac{\partial}{\partial u_j} + 2 x_l u_l \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad (\text{speziell konform}) \quad (2.144)$$

hinzu. Diese ist aber nur von mathematischer Natur interessant, da die Bedingung  $7\mu + 3\lambda = 0$  im Widerspruch zu den Bedingungen (2.38) der positiven Definitheit der Formänderungsenergie steht. Olver [28] untersuchte verallgemeinerte Transformationen von der Form (2.99) und fand für die statischen Navier Gln. sechs verallgemeinerte Symmetrien. In dieser Arbeit werden wir uns nur mit den klassischen Lie-Punkt Symmetrien befassen, denen man immer eine geometrische und dadurch auch physikalische Bedeutung zuordnen kann. Wie lassen sich alle Variationssymmetrien für die Lagrange-dichte finden? Ihre Kenntnis ist insofern wichtig, da man nach dem Noether Theorem [25] jeder Variationssymmetrie einen Erhaltungssatz zuordnen kann. Man sucht nach allen infinitesimalen Symmetrien (2.127) welche das Variationsproblem (2.94) invariant

lassen. Man sah schon wie aus der Translationssymmetrie die Erhaltungsgröße  $J_k = 0$  gewonnen werden konnte. Jetzt möchten wir uns mit einer systematischen mathematischen Methode befassen, aus welcher alle Erhaltungssätze aus den Symmetrien der Lagrangedichte gewinnen lassen.

Im allgemeinen sucht man die Punkttransformationen für die Invarianz des Wirkungsfunktionals

$$S := \int_{V'} \mathcal{L}(\mathbf{x}', \mathbf{u}', \mathbf{u}'^{(n)}) dV' = \int_V \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(n)}) dV. \quad (2.145)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{u}^{(n)}$  alle Ableitungen bis zur  $n$ -ten Ordnung des Vektorfeldes  $\mathbf{u}$ . Das infinitesimale Invarianzkriterium [32] besagt, daß die infinitesimale Transformation (2.124) und (2.125) dann und nur dann eine Variationssymmetrie des Funktionals (2.145) ist, wenn für jeden infinitesimalen Erzeuger (2.127) die Bedingung

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{v}(\mathcal{L}) + \mathcal{L} D_i X_i = 0, \quad (2.146)$$

gilt. Wendet man das infinitesimale Invarianzkriterium (2.146) auf die Formänderungsenergie  $\mathcal{L} = -W(x_k, u_{i,k})$  der linearen Elastostatik unter der Vernachlässigung äußerer Volumenkräfte  $V = 0$  an, so ergibt sich

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{v}(W) + W D_i X_i = 0, \quad (2.147)$$

da die Formänderungsenergie nur von den ersten Ableitungen des Verschiebungsfeldes abhängt. Für die Anwendung des infinitesimalen Kriteriums (2.146) braucht man nur die erste Prolongation. Aus den Gln. (2.121) und (2.122) ergibt sich

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_Q(W) + X_i D_i W + W D_i X_i = Q_j^u \frac{\partial W}{\partial u_j} + D_i Q_j^u \frac{\partial W}{\partial u_{j,i}} + D_i(W X_i) = 0. \quad (2.148)$$

Durch partielle Differentiation des zweiten Terms erhält man

$$Q_j^u E_j(W) + D_i \left( Q_j^u \frac{\partial W}{\partial u_{j,i}} + W X_i \right) = 0. \quad (2.149)$$

Da die Euler-Lagrange Gln.  $E_j(W) = 0$  immer gelten, erhält man aus Gl. (2.149) den folgenden Erhaltungssatz

$$D_i A_i = 0, \quad A_i = Q_j^u \frac{\partial W}{\partial u_{j,i}} + W X_i \quad (2.150)$$

Mit der Charakteristik (2.132) bekommt man den *erhaltenden Strom*

$$A_i = U_j \frac{\partial W}{\partial u_{j,i}} - X_l u_{j,l} \frac{\partial W}{\partial u_{j,i}} + W X_i. \quad (2.151)$$

Für die Translationssymmetrie  $x'_i = x_i + \epsilon_k \delta_{ki}$ ,  $u'_k = u_k$  bekommt man aus der infinitesimalen Transformation (2.124), (2.125) mit den Komponenten des infinitesimalen Erzeugers (2.127)  $X_i = \delta_{ki}$  und  $U_k = 0$  den erhaltenden Strom

$$P_{ki} := A_{ki} = W \delta_{ki} - u_{j,k} \frac{\partial W}{\partial u_{j,i}} = W \delta_{ki} - u_{j,k} \tau_{ji}. \quad (2.152)$$

In ihm erkennt man den im Abschnitt 2.2 auf anderem Weg hergeleiteten Eshelby-schen Spannungstensor (2.68) wieder. Wenn für die Lagrangedichte der Elastostatik ein infinitesimaler Erzeuger (2.127) die Bedingung (2.147) erfüllt, dann ist er als Variationssymmetrie geeignet. Aus dieser Variationssymmetrie wurde gerade gezeigt wie man den erhaltenden Strom (2.151) erhält.

Sind alle bekannten Symmetrien (2.139)–(2.142) und (2.143) der statischen Navier-Gln. (Euler-Lagrange Gln.) auch Variationssymmetrien? Falls alle das infinitesimale Kriterium (2.147) erfüllen, dann sind sie es auch. Dieses entscheidet allein, welche Euler-Lagrange Symmetrien sich auch als Variationssymmetrien eignen. Für jede Symmetrie, die dieses Kriterium erfüllt, bekommt man einen erhaltenden Strom. Man kann natürlich die Frage auch in umgekehrte Richtung stellen. Sind alle Variationssymmetrien mit der Formänderungsenergie  $W$  auch Symmetrien der statischen Navier Gln.? Nach bekanntem Satz [32] gilt das immer, daß alle Variationssymmetrien sich weiter als Symmetrien in den Euler-Lagrange Gln. vererben. Aber in der umgekehrten Reihenfolge gilt dieser Satz nicht. Nicht jede Symmetrie der Euler-Lagrange Gln. ist auch eine Variationssymmetrie. Als häufigstes Gegenbeispiel gilt die Skalierungssymmetrie. Die Rotationsinvarianz des Funktionals (2.145) in der Elastostatik bezüglich der Lie-Gruppe  $SO(3)$  ist durch die infinitesimale Transformation

$$x'_i = x_i + \epsilon_{kji} x_j \varepsilon_k, \quad u'_\alpha = u_\alpha + \epsilon_{k\beta\alpha} u_\beta \varepsilon_k \quad (2.153)$$

im Raum der unabhängigen und abhängigen Variablen zugleich (siehe auch Gl. (2.140)) gegeben. Die Komponenten des infinitesimalen Erzeugers (2.127) lauten

$$X_{ik} = \epsilon_{ikj} x_j, \quad U_{\alpha k} = \epsilon_{\alpha k \beta} u_\beta. \quad (2.154)$$

Somit ist nach Gl. (2.151) auch der erhaltende Rotationsstrom

$$A_{ki} = \epsilon_{kmj} \left[ x_m \left( W \delta_{ij} - u_{\alpha,j} \frac{\partial W}{\partial u_{\alpha,i}} \right) + u_m \frac{\partial W}{\partial u_{j,i}} \right] \quad (2.155)$$

gegeben. Mit der Definition des Spannungstensors (2.30) bekommt man schließlich

$$M_{ki} := A_{ki} = \epsilon_{kmj} (x_m P_{ji} + u_m \tau_{ji}), \quad (2.156)$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis (2.78), welches man aus der Anwendung des Rotationsoperators auf das Moment der Lagrangedichte erhalten hat. Unter den besprochenen Voraussetzungen der Abwesenheit äußerer Kräfte und der Wahl eines isotropen Konsitutivgesetzes (2.34) folgt der lokale Erhaltungssatz (2.82) für den totalen Drehimpulstensor. Aus diesem folgt analog zur integralen Erhaltungsgröße des  $J_k$ -Integrals (2.73) eines homogenen Materials die Erhaltung des  $L_i$ -Integrals (2.84) eines isotropen Materials.

In der klassischen Elastizität gehört die Skalierungsgruppe auch zu einer Variationssymmetrie. Die infinitesimale Transformation für die Skalierungsgruppe lautet

$$x'_i = (1 + \varepsilon) x_i, \quad u'_\alpha = (1 + \varepsilon d_u) u_\alpha, \quad (2.157)$$

wobei  $d_u$  die Skalierungsdimension des Vektorfelds  $\mathbf{u}$  angibt. Die Dimension des Vektorfeldes  $\mathbf{u}$  in  $n$ -Dimensionen ist durch

$$d_u = -\frac{n-2}{2} \quad (2.158)$$

gegeben. Somit gilt in der Elastostatik  $d_u = -1/2$ , da  $n = 3$ . Der infinitesimale Erzeuger hat die Komponenten

$$X_i = x_i, \quad U_\alpha = d_u u_\alpha. \quad (2.159)$$

Damit ist auch der erhaltende Skalierungsstrom

$$A_i = x_i W + (d_u u_\alpha - x_k u_{\alpha,k}) \frac{\partial W}{\partial u_{\alpha,i}} \quad (2.160)$$

gegeben. Setzt man in den Skalierungsstrom (2.160) die Spannung ein, so ergibt sich seine endgültige Form

$$Y_i := A_i = x_j P_{ji} + d_u u_j \tau_{ji}. \quad (2.161)$$

Der Skalierungsstrom (2.161) erfüllt den lokalen Erhaltungssatz (2.89), aus welchem durch Integration die Erhaltung (2.91) des  $M$ -Integrals (2.90) folgt. Andererseits ist für ein Material, welches ein von den betrachteten Längenskalen abhängiges Deformationsverhalten zeigt, das  $M$ -Integral (2.90) nicht erhalten und somit ungleich Null. Sein Wert beschreibt den Bruch der Skalierungsinvarianz, d.h. den Verlust des selbstähnlichen Verhaltens für die Materialeigenschaften. Dieser Symmetriebruch findet in Materialien mit einer inneren Struktur statt, welche das Vorhandensein von inneren Längen fordern. Diese Mikrostruktur ist mit dem Auftreten von Spannungen höherer Ordnung (Hyperspannungen, Momentenspannungen) verbunden. Deswegen bekommt man im Vergleich zur Translationssymmetrie und Rotationssymmetrie für die Skalierungssymmetrie keinen Erhaltungssatz, sondern eine Bilanzgleichung. Darauf werden wir im zweiten und dritten Kapitel eingehen, wo die Erhaltungssätze der Elastizität mit Mikrostruktur und der Gradientenelastizität untersucht werden. In solchen Materialien ist die Skalierungssymmetrie gebrochen. In der Gradientenelastizität hängt die Lagrange-dichte von höheren Ableitungen des Verschiebungsfeldes ab. Berücksichtigt man z.B. zusätzlich zur ersten noch die zweite Ableitung des Verschiebungsfeldes, so ist für die Anwendung des infinitesimalen Kriteriums (2.146) die zweite Prolongation erforderlich.

Die Symmetrie (2.143) ruht daher, daß die Euler-Lagrange Gln. linear sind und das Superponieren von einzelnen Lösungen auch eine Lösung ist. Das Vektorfeld  $v^5$  ist der Erzeuger dieser Divergenzsymmetrie. Die infinitesimalen Transformationen für diese Symmetrie lauten

$$x'_i = x_i, \quad u'_\alpha = u_\alpha + \varepsilon f_\alpha. \quad (2.162)$$

Dabei ist  $f_\alpha$  eine beliebige Lösung der Feldgleichungen. Die Komponenten des infinitesimalen Erzeugers der Addition von Lösungen sind durch

$$X_i = 0, \quad U_\alpha = f_\alpha, \quad (2.163)$$

gegeben. Für die Funktion  $B_i$  gilt

$$B_i = -u_j \tau_{ji}(\mathbf{f}). \quad (2.164)$$

Damit kann der entsprechende erhaltende Strom

$$A_i = -f_j \tau_{ji}(\mathbf{u}) + u_j \tau_{ji}(\mathbf{f}), \quad (2.165)$$

angegeben werden. Dies ist das Resultat des Betti-Theorems [32]. Es resultiert aus der Linearität der Navier Gleichungen.





# Kapitel 3

## Mikrostruktur in der Elastizität

### 3.1 Kinematik und Dynamik

Der Gedanke, bei welchem, jedem materiellen Punkt eines dreidimensionalen elastischen Kontinuums eine sogenannte Einheitszelle zugeordnet wird, geht auf die Brüder Cosserat [33] zurück. In diesem Cosserat-Kontinuum stellt die Einheitszelle ein orthogonales und starres Dreibein dar, welches aus drei zueinander orthogonalen Einheitsvektoren aufgespannt wird. Zu den drei Translationsfreiheitsgraden des Verschiebungsfeldes  $u_i$  des Makrokontinuums kommen noch drei rotatorische Freiheitsgrade für das Drehfeld  $\psi_i$  der starren Mikrostruktur hinzu. Die materiellen Punkte erhalten damit eine Orientierung. Man spricht auch von einem *mikropolaren Medium*. Der materielle Punkt eines Cosserat-Kontinuums kann als ein infinitesimaler, starrer Körper aufgefaßt werden. Die Arbeit [35] bietet einen attraktiven zusammenfassenden Bericht über das Cosserat-Kontinuum. Im allgemeinen Fall, wenn eine Deformation der Einheitszelle, gegeben durch ein deformierbares Dreibein, zugelassen wird, verbindet man mit jedem materiellen Punkt einen sogenannten *Mikrodistorsionstensor*  $\psi_{ij}$  bestehend aus neuen unabhängigen Komponenten. Die Arbeiten [36, 67, 68] geben einen Überblick über die Elastizitätstheorie eines Kontinuums mit einer deformierbaren Mikrostruktur. Man spricht dann von einem *mikromorphen Medium*. Beschränkt sich die Deformation der Mikrostruktur nur auf eine starre Rotation und eine Dilatation, dann erfährt diese zusätzlich zur *Mikrorotation*  $\psi_i$  eine durch eine skalare Funktion  $\psi$  beschriebene *Mikrodilatation*.

Wir möchten jetzt die kinematischen Größen eines Kontinuums mit Mikrostruktur für den Fall einer linearen Deformation nach Mindlin [36] einführen. Ein materielles Volumen  $V$  mit der Oberfläche  $S$  erfährt nach Gl. (2.1) die Verschiebung

$$u_k = x_k - X_k. \quad (3.1)$$

Die Koordinaten  $x_k$  stellen die räumlichen, Eulerschen Ortskoordinaten dar, gemessen von einem Koordinatensystem mit einem ortsfesten Ursprung. Die Koordinaten  $X_k$  sind die mit dem Makropartikel materiell verbundenen Lagrangeschen Ortskoordinaten. Innerhalb dieses Makropartikels befindet sich eine Mikrostruktur vom Volumen  $V'$

eingebettet.  $V'$  wird als *Mikrovolumen* bezeichnet. Die Mikrostruktur erfährt in jedem ihrer Punkte die Mikroverschiebung

$$u'_k = x'_k - X'_k. \quad (3.2)$$

Die Koordinaten  $X'_k$ ,  $x'_k$  sind entsprechend die materielle und räumliche Ortskoordinaten. Sie liegen am Anfang des Deformationsprozesses im Schwerpunkt des Makropartikels und sind parallel zu den  $x_k$  Koordinatenachsen. Ihr Ursprung ist mit der Mikrostruktur fest verbunden. Da lineare Deformationsprozesse betrachtet werden, sind die Beträge der Verschiebungsgradienten klein und die Linearisierung nach Gl. (2.12) liefert

$$\frac{\partial u_k}{\partial X_l} = \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = u_{k,l}, \quad u_k = u_k(x_l, t), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u'_k}{\partial X'_l} = \frac{\partial u'_k}{\partial x'_l} = u'_{k',l'}, \quad u'_k = u'_k(x_l, x'_l, t), \quad (3.4)$$

wobei  $t$  die Zeit für eine dynamische Deformation darstellt. Unter der Annahme, daß die Mikroverschiebung  $u'_k$  als Polynom in den  $x'_k$  Koordinaten geschrieben werden kann, gilt als erste Näherung für den ersten linearen Term dieses Polynoms

$$u'_k = \psi_{kl} x'_l, \quad (3.5)$$

mit  $\psi_{kl} = \psi_{kl}(x_i, t)$ . Somit verläuft die Mikrodistorion

$$\psi_{kl} := u'_{k',l'} \quad (3.6)$$

homogen im Volumen  $V'$  und inhomogen im Volumen  $V$ . Aus der Mikrodistorion lassen sich auch die *Mikroverzerrung*

$$e_{kl} := \psi_{(kl)} = \frac{1}{2}(\psi_{kl} + \psi_{lk}) \quad (3.7)$$

als symmetrischer Anteil von  $\psi_{kl}$  und die *Mikrorotation*

$$w_{kl} := \psi_{[kl]} = \frac{1}{2}(\psi_{kl} - \psi_{lk}) \quad (3.8)$$

als antisymmetrischer Anteil der Mikrodistorion definieren. Weiterhin gelten die im Kapitel 2 als Makrodeformation (2.15), Makroverzerrung (2.14) und Makrorotation (2.17) eingeführten kinematischen Größen des Makromediums. Der antisymmetrische Anteil  $w_{kl}$  des Mikromediums beschreibt die Drehungskomponenten des Cosserat-Dreibeins, welche für Verdrillungen und Verkrümmungen zuständig sind. Mit den gegebenen kinematischen Maßen für das Makromedium und das Mikromedium kann jetzt die sogenannte *relative Deformation*

$$\gamma_{kl} := \beta_{kl} - \psi_{kl} \quad (3.9)$$

definiert werden. Dabei stellt  $\beta_{kl}$  den in der Gl. (2.15) im Kapitel 2 eingeführten Distorsionstensor des Makromediums dar. Zusätzlich kann der *Mikrodistorsionsgradient*

$$\kappa_{klm} := \psi_{kl,m} \quad (3.10)$$

als Makrogradient der Mikrodistorsion  $\psi_{kl}$  eingeführt werden. Die Tensoren  $e_{kl}$ ,  $\gamma_{kl}$ ,  $\kappa_{kl}$  sind unabhängig von den Koordinaten  $x'_k$ .

Liegt ein lineares Cosserat-Medium [34] vor, so vereinfacht sich die Kinematik. Mit Hilfe der infinitesimalen Drehung, die durch den Drehvektor  $\psi$  gegeben ist, wird aus der Gl. (3.9)

$$\gamma_{kl} = \beta_{kl} - \epsilon_{klm}\psi_m, \quad \psi_{[kl]} = \epsilon_{klm}\psi_m, \quad (3.11)$$

wobei  $\epsilon_{klm}$  der total antisymmetrische Tensor von Levi-Civita ist. Der dreistufige Mikrodistorsionsgradient (3.10) reduziert sich auf den zweistufigen Tensor

$$\kappa_{kl} = \psi_{k,l}, \quad (3.12)$$

dessen Diagonalkomponenten  $k = l$  Verdrillungsdeformationen und die mit ungleichen Indizes  $k \neq l$  Verkrümmungsdeformationen beschreiben. Der symmetrische Anteil von Gl. (3.11) ist mit dem Verzerrungstensor des klassischen Kontinuums (2.14) identisch. Der antisymmetrische Anteil

$$\gamma_{[kl]} = \omega_{kl} - \epsilon_{klm}\psi_m \quad (3.13)$$

beschreibt die Relativedrehung des örtlichen, an jedem materiellen Punkt haftenden Dreibeins gegenüber der mittleren Drehung im Verschiebungsfeld. Führt der Festkörper als Ganzes eine Starrkörperbewegung aus, so verschwinden die Deformationen  $\gamma_{kl}$ ,  $\kappa_{kl}$ . Wenn die Mikrostruktur als einzige Deformation einer Dilatation  $\psi$  unterworfen wird, so kommt als neue Größe zum Drehvektor  $\psi_k$  der *Mikrodilatationsgradient*

$$e = \psi, \quad \kappa_k = \psi_{,k} \quad (3.14)$$

hinzu. Die Mikrostruktur wird in einem Kontinuum mit Mikrodilatation durch den Drehvektor  $\psi_k$  und die skalare Dilatationsfunktion  $\psi$  charakterisiert (siehe auch [69, 70, 71]). Im folgenden werden die Kompatibilitätsbedingungen [71] für die linearen Kontinua mit diesen drei Arten von Mikrostruktur angegeben. Im allgemeinen Fall liegt ein kompatibles mikromorphes Medium vor, wenn folgende Beziehungen

$$\epsilon_{kpq}(\gamma_{pl,q} + \kappa_{lpq}) = 0, \quad (3.15)$$

$$\epsilon_{kpq}\kappa_{lmp,q} = 0, \quad (3.16)$$

$$\kappa_{klm} + \kappa_{lkm} - 2e_{kl,m} = 0 \quad (3.17)$$

gelten. Für ein elastisches mikropolares Medium heißen diese

$$\epsilon_{kpq}\gamma_{lq,p} + \kappa_{pp}\delta_{kl} - \kappa_{kl} = 0, \quad (3.18)$$

$$\epsilon_{kpq}\kappa_{lq,p} = 0. \quad (3.19)$$

## 3.2 Elastizität mit Mikrodilatation

Im Kapitel 2 haben wir uns mit dem Noetherschen Theorem vertraut gemacht und die mathematischen Grundlagen zur Berechnung von Lie-Punkt Symmetrien kennengelernt. Wir werden die Peter Olver Methode zum Berechnen der Euler-Lagrange Symmetrien und Variationssymmetrien für elastische Media mit Mikrostruktur verwenden. Wir beschränken uns auf ein linear isotropes, homogenes und kompatibles Kontinuum. Mit den bekannten infinitesimalen Symmetrien werden mit Hilfe des Noetherschen Theorems die entsprechenden Erhaltungssätze hergeleitet. Die schon für die klassische Elastizität gefundene wegunabhängigen  $J_k$ -,  $L_k$ - und  $M$ -Integrale werden für elastische Festkörper mit einer Mikrostruktur verallgemeinert. Die damit zusammenhängenden divergenzfreien Größen sind der Energie-Impuls Tensor, der Drehimpuls Tensor und der Dilatations oder Skalierungsfluß. Die Arbeiten von Jaric [72, 73], Dai [74] und Vukobrat [75] beschäftigen sich mit dem Problem der Formulierung von Erhaltungssätzen und ebenso mit der Angabe eines wegunabhängigen  $J_k$ -Integrals für mikropolare Media. Pucci und Saccomandi [76], Lubarda und Markenscoff [77] berechneten für ein mikropolares Medium die Variationssymmetrien und gaben mit Hilfe des Noetherschen Theorems die entsprechenden Erhaltungssätze für die Translations- und Rotations-Symmetrie an. Aufgrund der Mikrostruktur wird die Symmetrie der Skalierung gebrochen. Für elastische, poröse Media findet man in der Arbeit [78] die Erhaltungssätze. Wir möchten die Erhaltungssätze und wegunabhängige Integrale für ein Kontinuum mit Mikrodilatation und mikromorphes Kontinuum bestimmen (siehe auch [79]). Es werden die Euler-Lagrange Symmetrien und die Variationssymmetrien für diese beiden Fälle ausgerechnet.

## 3.3 Lie-Punkt Symmetrien

Mit Hilfe der kinematischen Größen  $\gamma_{kl}$ ,  $\psi_k$ ,  $\psi$  und  $\kappa_{kl}$  für ein Medium mit Mikrodilatation sind auch die dualen, Größen folgendermaßen

$$t_{kl} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{kl}}, \quad s - t = \frac{\partial W}{\partial \psi}, \quad m_{kl} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{kl}}, \quad m_k = \frac{\partial W}{\partial \psi_{,k}}, \quad (3.20)$$

gegeben. Die potentielle Energiedichtefunktion  $W$  für ein solches Kontinuum lautet

$$W = \frac{1}{2} t_{kl} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} (s - t) \psi + \frac{1}{2} m_{kl} \kappa_{kl} + \frac{1}{2} m_k \kappa_k. \quad (3.21)$$

Der Tensor  $t_{kl}$  ist der Spannungstensor,  $s - t$  ist die, für die Dilatation der Mikrostruktur verantwortliche, innere Volumenkraft,  $m_{kl}$  ist der Momentenspannungstensor und  $m_k$  ist der Mikrodilationsvektor und verursacht die Dilatation der Mikrostruktur. Im statischen Fall, wenn also die kinetische Energie  $T = 0$  verschwindet, lautet die Lagrangedichte  $\mathcal{L} = -W$  und aus dem Wirkungsfunktional

$$S := \int_V W(u_{k,l}, \psi_k, \psi_{k,l}, \psi, \psi_{,k}) dV \quad (3.22)$$

mit der potentiellen Energiedichte (3.21) bekommt man für die Variation der Feldvariablen  $u_k$ ,  $\psi_k$  und  $\psi$ , die das Wirkungsfunktional  $S$  stationär  $\delta S = 0$  werden lassen, die folgenden drei Euler-Lagrange Gln.

$$E_k^u(W) = \frac{\partial W}{\partial u_k} - D_i \frac{\partial W}{\partial u_{k,i}} = 0, \quad (3.23)$$

$$E_k^\psi(W) = \frac{\partial W}{\partial \psi_k} - D_i \frac{\partial W}{\partial \psi_{k,i}} = 0, \quad (3.24)$$

$$E^\psi(W) = \frac{\partial W}{\partial \psi} - D_i \frac{\partial W}{\partial \psi_{,i}} = 0, \quad (3.25)$$

wobei  $D_i$  die totale Ableitung ist, welche auf die vektorwertige Funktionen der Verschiebung des Makromediums  $u_k$ , der Drehung der Mikrostruktur  $\psi_k$  und die skalare Funktion der Mikrodilatation  $\psi$  wirkt

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_{\alpha,i} \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + u_{\alpha,ij} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha,j}} + \psi_{\alpha,i} \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} + \psi_{\alpha,ij} \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha,j}} + \psi_{,i} \frac{\partial}{\partial \psi} + \psi_{,ij} \frac{\partial}{\partial \psi_{,j}} + \dots \quad (3.26)$$

Für homogene Materialien ist die Energiedichte  $W$  unabhängig von den Ortsvariablen  $x_k$ , d.h. es ist  $\frac{\partial W}{\partial x_k} = 0$ . Man bekommt aus (3.23)–(3.25) ohne Berücksichtigung von äußeren Volumenkräften, Volumenmomenten und Mikrodilatationskräften folgende Bilanzgleichungen

$$D_l t_{kl} = 0, \quad (3.27)$$

$$D_l m_{kl} - \epsilon_{kmn} t_{mn} = 0, \quad (3.28)$$

$$D_l m_l - s + t = 0. \quad (3.29)$$

Die Konstitutivgleichungen für ein isotropes Kontinuum mit Mikrodilatation haben folgende Gestalt

$$t_{kl} = (\lambda_0 \psi + \lambda u_{r,r}) \delta_{kl} + \mu (u_{k,l} + u_{l,k}) + \kappa (u_{k,l} + \epsilon_{klm} \psi_m), \quad (3.30)$$

$$s - t = \lambda_1 \psi + \lambda_0 u_{r,r}, \quad (3.31)$$

$$m_{kl} = \alpha \psi_{r,r} \delta_{kl} + \beta \psi_{l,k} + \gamma \psi_{k,l}, \quad (3.32)$$

$$m_k = \alpha_0 \psi_{,k}. \quad (3.33)$$

Werden die Materialgleichungen (3.30)–(3.33) in den Gln. (3.27)–(3.29) eingesetzt, so bekommt man als Ergebnis die Feldgleichungen der Elastizität mit Mikrodilatation in Abhängigkeit von den Feldvariablen  $u_k$ ,  $\psi_k$  und  $\psi$

$$\lambda_0 \psi_{,k} + (\mu + \lambda) u_{l,lk} + (\mu + \kappa) u_{k,ll} + \kappa \epsilon_{klm} \psi_{m,l} = 0, \quad (3.34)$$

$$(\alpha + \beta) \psi_{l,lk} + \gamma \psi_{k,ll} + \kappa \epsilon_{kmn} u_{n,m} - 2\kappa \psi_k = 0, \quad (3.35)$$

$$\alpha_0 \psi_{,ll} - \lambda_1 \psi - \lambda_0 u_{l,l} = 0. \quad (3.36)$$

Die Euler-Lagrange Gln. (3.34)–(3.36) stellen ein System von sieben gekoppelten, linearen Differentialgleichungen  $\Delta \equiv (\Delta_1, \dots, \Delta_7) = 0$  dar.  $\mathbf{x}$  sind die unabhängigen

räumlichen Variablen und  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\psi}$ ,  $\psi$  sind entsprechend die abhängigen Feldvariablen. Sie spannen den Basisraum  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \psi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}$  (in unserem Fall gilt  $n = 3$ ,  $p = 3$  und  $q = 3$ ) auf. Das Gleichungssystem  $\Delta = 0$  ist von zweiter Ordnung in den unbekannten Variablen. Ist  $G$  die Lie-Gruppe, die die Gln. (3.34)–(3.36) invariant läßt, dann sind die infinitesimalen Transformationen

$$x'_i = x_i + \varepsilon X_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \psi) + \cdots, \quad (3.37)$$

$$u'_\alpha = u_\alpha + \varepsilon U_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \psi) + \cdots, \quad (3.38)$$

$$\psi'_\alpha = \psi_\alpha + \varepsilon \Psi_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \psi) + \cdots, \quad (3.39)$$

$$\psi' = \psi + \varepsilon \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \psi) + \cdots, \quad (3.40)$$

mit folgenden infinitesimalen Erzeugern

$$X_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \psi) := \left. \frac{\partial x'_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad U_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \psi) := \left. \frac{\partial u'_\alpha}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad (3.41)$$

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \psi) := \left. \frac{\partial \psi'_\alpha}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \psi) := \left. \frac{\partial \psi'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad (3.42)$$

gegeben. Für die Indizes gilt:  $i = 1, \dots, n$ ,  $\alpha = 1, \dots, p$  und  $\beta = 1, \dots, p$ . Damit erzeugt der infinitesimale Erzeuger  $G$  das Vektorfeld

$$\mathbf{v} = X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + U_\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + \Psi_\alpha \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} + \Psi \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad (3.43)$$

welches lokal auf den Basisraum wirkt. Daraus erhält man die erste Prolongation von  $\mathbf{v}$  als

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \bar{U}_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha,i}} + \bar{\Psi}_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha,i}} + \bar{\Psi}_i \frac{\partial}{\partial \psi_i}, \quad (3.44)$$

mit

$$\bar{U}_{\alpha i} = D_i(U_\alpha - X_k u_{\alpha,k}) + X_k u_{\alpha,ki}, \quad (3.45)$$

$$\bar{\Psi}_{\alpha i} = D_i(\Psi_\alpha - X_k \psi_{\alpha,k}) + X_k \psi_{\alpha,ki}, \quad (3.46)$$

$$\bar{\Psi}_i = D_i(\Psi - X_k \psi_{\alpha,k}) + X_k \psi_{\alpha,ki}. \quad (3.47)$$

Aus dem Vektorfeld  $\mathbf{v}$  lassen sich die Charakteristiken

$$Q_\alpha^u = U_\alpha - X_k u_{\alpha,k}, \quad (3.48)$$

$$Q_\alpha^\psi = \Psi_\alpha - X_k \psi_{\alpha,k}, \quad (3.49)$$

$$Q^\psi = \Psi - X_k \psi_{\alpha,k}, \quad (3.50)$$

angeben. Zu der ersten Charakteristik, die mit der Gl. (2.132) für das Verschiebungsfeld der klassischen Elastizität identisch ist, bekommt man aufgrund der Feldgrößen

$\psi_{ij}$  und  $\psi$  zwei zusätzliche Charakteristiken hinzu. Mit den im Kapitel 2 eingeführten Prolongationsformeln (2.121) und (2.122) läßt sich die erste Prolongation (3.44) folgendermaßen

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{v} = \text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_Q + X_i D_i \quad (3.51)$$

umschreiben, wobei  $\text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_Q$  die Form

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_Q = & Q_\alpha^u \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + D_i Q_\alpha^u \frac{\partial}{\partial u_{\alpha,i}} + Q_\alpha^\psi \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} + D_i Q_\alpha^\psi \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha,i}} \\ & + Q^\psi \frac{\partial}{\partial \psi} + D_i Q^\psi \frac{\partial}{\partial \psi_{,i}}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

annimmt. Um die Lie-Punkt Symmetrien der Euler-Lagrange Gln. (3.34)–(3.36) zu bestimmen, braucht man die zweite Prolongation  $\text{pr}^{(2)}\mathbf{v}$  des Vektorfeldes  $\mathbf{v}$ . Sie stellt eine Erweiterung der ersten Prolongation (3.44) dar und ist gegeben durch

$$\text{pr}^{(2)}\mathbf{v} = \text{pr}^{(1)}\mathbf{v} + \bar{U}_{\alpha ij} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha,ij}} + \bar{\Psi}_{\alpha ij} \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha,ij}} + \bar{\Psi}_{ij} \frac{\partial}{\partial \psi_{,ij}}, \quad (3.53)$$

mit den zusätzlichen Komponenten

$$\bar{U}_{\alpha ij} = D_j(\bar{U}_{\alpha i} - X_k u_{\alpha,ik}) + X_k u_{\alpha,jik}, \quad (3.54)$$

$$\bar{\Psi}_{\alpha ij} = D_j(\bar{\Psi}_{\alpha i} - X_k \psi_{\alpha,ik}) + X_k \psi_{\alpha,jik}, \quad (3.55)$$

$$\bar{\Psi}_{ij} = D_j(\bar{\Psi}_i - X_k \psi_{,ik}) + X_k \psi_{,jik}, \quad (3.56)$$

des prolongierten Vektorfeldes. Wendet man die Symmetriebedingung (2.134) mit der zweiten Prolongation gegeben durch Gl. (3.53) auf die Euler-Lagrange Gln. (3.34)–(3.36) an, so erhält man folgendes Bestimmungssystem

$$\left[ \lambda_0 \Psi_{,k} + (\mu + \lambda) U_{l,lk} + (\mu + \kappa) U_{k,ll} + \kappa \epsilon_{klm} \Psi_{m,l} \right]_{\Delta=0} = 0, \quad (3.57)$$

$$\left[ (\alpha + \beta) \Psi_{l,lk} + \gamma \Psi_{k,ll} + \kappa \epsilon_{kmn} u_{n,m} - 2\kappa \Psi_k \right]_{\Delta=0} = 0, \quad (3.58)$$

$$\left[ \alpha_0 \Psi_{,ll} - \lambda_1 \Psi - \lambda_0 U_{l,l} \right]_{\Delta=0} = 0. \quad (3.59)$$

Die infinitesimalen Erzeuger, welche die Euler-Lagrange Gln. invariant lassen, lauten

$$X_i = d_i + \epsilon_{ijk} x_j a_k, \quad (3.60)$$

$$U_\alpha = c u_\alpha + \epsilon_{\alpha jk} u_j a_k + f_\alpha(x), \quad (3.61)$$

$$\Psi_\alpha = c \psi_\alpha + \epsilon_{\alpha jk} \psi_j a_k + g_\alpha(x), \quad (3.62)$$

$$\Psi = c \psi + g(x). \quad (3.63)$$

$d_i$ ,  $a_i$  und  $c$  sind beliebige Parameter und  $f_i(x)$ ,  $g_i(x)$  und  $g(x)$  sind beliebige Lösungen der Gln. (3.34)–(3.36). Die Lie-Algebra der infinitesimalen Symmetrien der Feldglei-

chungen wird von den folgenden Lie-Vektorfelder aufgespannt

$$v_i^1 = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{Translation im Raum}), \quad (3.64)$$

$$v_i^2 = \epsilon_{ijk} \left( x_j \frac{\partial}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial}{\partial u_k} + \psi_j \frac{\partial}{\partial \psi_k} \right) \quad (\text{Drehung im Raum}), \quad (3.65)$$

$$v^3 = u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \psi_i \frac{\partial}{\partial \psi_i} + \psi \frac{\partial}{\partial \psi} \quad (\text{Skalierung}), \quad (3.66)$$

$$v^4 = f_i(x) \frac{\partial}{\partial u_i} + g_i(x) \frac{\partial}{\partial \psi_i} + g(x) \frac{\partial}{\partial \psi} \quad (\text{Addition von Lösungen}). \quad (3.67)$$

Im Gegensatz zur klassischen Elastizität stellt die Skalierungsgruppe  $x_i \partial_i$  keine Lie-Punkt Symmetrie der Feldgleichungen dar.

### 3.4 Erhaltungssätze

Wie schon im Kapitel 2 gezeigt wurde, kann eine Lie-Gruppe  $G$  nur dann eine Variationssymmetrie oder Divergenzsymmetrie sein, wenn folgende Bedingung

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{v}(W) + W D_i X_i = D_i B_i, \quad (3.68)$$

erfüllt ist.  $B_i$  ist eine analytische Funktion. Ist  $B_i \neq 0$ , dann stellt  $\mathbf{v}$  den Erzeuger einer Divergenzsymmetrie der potentiellen Energiedichte  $W$  dar. Andernfalls wenn  $B_i = 0$ , wird aus  $\mathbf{v}$  eine Variationssymmetrie. Setzt man die Gln. (3.51)–(3.52) für die erste Prolongation von  $\mathbf{v}$  in die Gl. (3.68) ein, so ergibt sich

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_Q(W) + D_i(W X_i) = D_i B_i, \quad (3.69)$$

mit  $\text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_Q(W)$  gegeben durch

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_Q = Q_\alpha^u \frac{\partial W}{\partial u_\alpha} + Q_\alpha^\psi \frac{\partial W}{\partial \psi_\alpha} + Q^\psi \frac{\partial W}{\partial \psi} + D_i Q_\alpha^u \frac{\partial W}{\partial u_{\alpha,i}} + D_i Q_\alpha^\psi \frac{\partial W}{\partial \psi_{\alpha,i}} + D_i Q^\psi \frac{\partial W}{\partial \psi_{,i}}. \quad (3.70)$$

Führt man eine partielle Integration aus, so bekommt man aus obiger Gleichung

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_Q(W) &= Q_\alpha^u E_\alpha^u(W) + Q_\alpha^\psi E_\alpha^\psi(W) + Q^\psi E^\psi(W) \\ &\quad + D_i \left( Q_\alpha^u \frac{\partial W}{\partial u_{\alpha,i}} + Q_\alpha^\psi \frac{\partial W}{\partial \psi_{\alpha,i}} + Q^\psi \frac{\partial W}{\partial \psi_{,i}} \right) \end{aligned} \quad (3.71)$$

Durch die Kombination der Gln. (3.69) und (3.71) liefert das infinitesimale Kriterium (3.68) die Beziehung

$$D_i A_i + Q_\alpha E_\alpha^u(W) + Q_\alpha^\psi E_\alpha^\psi(W) + Q^\psi E^\psi(W) = 0, \quad (3.72)$$



mit dem Strom

$$A_i = Q_\alpha^u \frac{\partial W}{\partial u_{\alpha,i}} + Q_\alpha^\psi \frac{\partial W}{\partial \psi_{\alpha,i}} + Q^\psi \frac{\partial W}{\partial \psi_i} + W X_i - B_i. \quad (3.73)$$

Die Euler-Lagrange Gln.  $E_\alpha^u(W) = 0$ ,  $E_\alpha^\psi(W) = 0$  und  $E^\psi(W) = 0$  sind während des gesamten Deformationsprozesses erfüllt. Damit folgt aus der Gl. (3.72) ein lokaler Erhaltungssatz. Mit den Charakteristiken (3.48)–(3.50) erhält schließlich der Strom (3.73) seine endgültige Form

$$A_i = (U_\alpha - X_k u_{\alpha,k}) \frac{\partial W}{\partial u_{\alpha,i}} + (\Psi_\alpha - X_k \psi_{\alpha,k}) \frac{\partial W}{\partial \psi_{\alpha,i}} + (\Psi - X_k \psi_{,k}) \frac{\partial W}{\partial \psi_i} + W X_i - B_i. \quad (3.74)$$

### 3.4.1 Translationsstrom

Die Translationssymmetrie ist eine Variationssymmetrie  $B_i = 0$ . Für diese Symmetrie erfahren nur die unabhängigen Variablen  $(\mathbf{x}, t)$  eine infinitesimale Transformation. Die abhängigen Variablen  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}, \psi)$  bleiben dabei unverändert. Aus den Formeln (3.37)–(3.40) bekommt man

$$x'_i = x_i + \varepsilon_k \delta_{ki}, \quad u'_\alpha = u_\alpha, \quad \psi'_\alpha = \psi_\alpha, \quad \psi' = \psi. \quad (3.75)$$

Die entsprechende infinitesimale Erzeuger lauten

$$X_{ki} = \delta_{ki}, \quad U_\alpha = 0, \quad \Psi_\alpha = 0, \quad \Psi = 0. \quad (3.76)$$

Mit den Komponenten (3.76) für den Erzeuger der Translationsgruppe ergibt sich aus der allgemeinen Formel (3.74) der Translationsstrom

$$P_{ki} := A_{ki} = W \delta_{ki} - u_{\alpha,k} \frac{\partial W}{\partial u_{\alpha,i}} - \psi_{\alpha,k} \frac{\partial W}{\partial \psi_{\alpha,i}} - \psi_{,k} \frac{\partial W}{\partial \psi_i}. \quad (3.77)$$

Dieser läßt sich mit Hilfe der Spannungen (3.20) in seine endgültige Form

$$P_{ki} = W \delta_{ki} - u_{\alpha,k} t_{\alpha,i} - \psi_{\alpha,k} m_{\alpha i} - \psi_{,k} m_i. \quad (3.78)$$

bringen. Der Tensor  $P_{ki}$  in der Gl. (3.78) ist der statische, kanonische Energie-Impuls-Tensor eines elastischen Kontinuums, für dessen Mikrostruktur die Starrkörperrotation  $\psi_\alpha$  und die Dilatation  $\psi$  als gesamte Mikrodistorsion erlaubt sind. Er stellt durch die letzten zwei Terme eine Verallgemeinerung des Eshelbyschen Spannungstensor (2.69) der klassischen Elastizität dar. Aus dem infinitesimalen Erhaltungssatz  $D_i P_{ki} = 0$  und dem Gaußschen Satz bekommt man für das  $J_k$ -Integral (2.71) mit dem verallgemeinerten Eshelbyschen Spannungstensor (3.78) die integrale Erhaltungsgröße  $J_k = 0$ . Im Falle, daß ein inkompatibles, oder inhomogenes elastisches Medium mit einer Mikrodilatationsstruktur vorliegt, wird die Translationssymmetrie gebrochen und es gilt  $J_k \neq 0$ .

### 3.4.2 Rotationsstrom

Aus der Isotropie des Materials und der Rotationssymmetrie (3.65) gibt es genau wie für die Translationssymmetrie einen erhaltenden Strom. Die infinitesimalen Transformationen lauten

$$x'_i = x_i + \epsilon_{kji} x_j \varepsilon_k, \quad u'_\alpha = u_\alpha + \epsilon_{k\beta\alpha} u_\beta \varepsilon_k, \quad \psi'_\alpha = \psi_\alpha + \epsilon_{k\beta\alpha} \psi_\beta \varepsilon_k, \quad \psi' = \psi. \quad (3.79)$$

Daraus ergibt sich für die infinitesimalen Erzeuger

$$X_{ik} = \epsilon_{ikj} x_j, \quad \tau = 0, \quad U_{\alpha k} = \epsilon_{\alpha k\beta} u_\beta, \quad \Psi_{\alpha k} = \epsilon_{\alpha k\beta} \psi_\beta, \quad \Psi = 0. \quad (3.80)$$

Mit diesen Transformationen bekommt man aus der Gl. (3.74) den Rotationsstrom

$$\begin{aligned} M_{ki} := A_{ki} = & \epsilon_{kj\alpha} \left( u_j \frac{\partial W}{\partial u_{\alpha,i}} + \psi_j \frac{\partial W}{\partial \psi_{\alpha,i}} \right) - \epsilon_{kjn} x_j \left( u_{\alpha,n} \frac{\partial W}{\partial u_{\alpha,i}} + \psi_{\alpha,n} \frac{\partial W}{\partial \psi_{\alpha,i}} + \psi_{,n} \frac{\partial W}{\partial \psi_{,i}} \right) \\ & + \epsilon_{kji} x_j W. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Mit Hilfe des Eshelbyschen Spannungstensors (3.78) und den Spannungen (3.20) erhält man

$$M_{ki} = \epsilon_{kjn} (x_j P_{ni} + u_j t_{ni} + \psi_j m_{ni}). \quad (3.82)$$

Dies ist der totale Drehimpulstensor. Der Tensor  $M_{ki}$  steht mit einem Tensor dritter Stufe

$$M_{ki} = \frac{1}{2} \epsilon_{kjn} M_{jni}. \quad (3.83)$$

in Relation. Dieser setzt sich aus zwei Anteilen

$$M_{jni} = L_{jni} + S_{jni} \quad (3.84)$$

zusammen. Der erste Term ist der orbitale Drehimpuls

$$L_{jni} = x_j P_{ni} - x_n P_{ji} \quad (3.85)$$

und der zweite Term beschreibt den inneren Drehimpuls

$$S_{jni} = u_j t_{ni} - u_n t_{ji} + \psi_j m_{ni} - \psi_n m_{ji}. \quad (3.86)$$

Die Isotropiebedingung folgt aus der Invarianz bezüglich der Drehung

$$D_i M_{ki} = \epsilon_{kjn} (u_{j,i} t_{ni} - u_{i,n} t_{ji} + \psi_{j,i} m_{ni} - \psi_{i,n} m_{ji} + \psi_j m_{ni,i} - \psi_n m_{j,i}). \quad (3.87)$$

Unter Benutzung der Materialgleichungen (3.30)–(3.33) zeigt man, daß die rechte Seite der Gl. (3.87) für ein isotropes Material verschwindet. Damit stellt auch das  $L_k$ -Integral (2.83) mit dem totalen Drehimpulstensor (3.82) eine globale Erhaltungsgröße mit  $L_k = 0$  dar. Im allgemeinen Fall anisotroper Materialien, wenn also keine Isotropie vorliegt, ist die Rotationssymmetrie  $L_k \neq 0$  gebrochen.

### 3.4.3 Addition von Lösungen

Diese Symmetrie existiert genauso wie bei den Euler-Lagrange Gln. (2.48) der klassischen Elastizität wegen der Linearität des Gleichungssystems  $\Delta = 0$  und ist eine Divergenzsymmetrie. Das zu  $v^4$  gehörende Vektorfeld  $B_i$  lautet

$$B_i = u_j t_{ji}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \psi_j m_{ji}(\mathbf{g}) + \psi m_i(g). \quad (3.88)$$

Die Bezeichnungen  $t_{ji}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ ,  $m_{ji}(\mathbf{g})$  und  $m_i(g)$  bedeuten, daß die Feldvariablen  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\psi}$ ,  $\psi$  durch die Größen  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  und  $g$  entsprechend ersetzt werden. Der erhaltende Strom für diese Symmetrie lautet

$$A_i = f_j t_{ji}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) + g_j m_{ji}(\boldsymbol{\psi}) + g m_i(\psi) - [u_j t_{ji}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \psi_j m_{ji}(\mathbf{g}) + \psi m_i(g)]. \quad (3.89)$$

Dieses Resultat ist nichts anderes als die Erweiterung des Betti-Theorems für die Elastizität mit Mikrodilatation. Falls  $\psi = 0$ , bekommt man analog als Ergebnis die Funktion  $B_i$  und den Strom  $A_i$  für ein mikropolares Medium. Mit dem Erhaltungstrom (3.89) ergibt sich folgender integraler Erhaltungssatz

$$\int_S [u_j t_{ji}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \psi_j m_{ji}(\mathbf{g}) + \psi m_i(g) - f_j t_{ji}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) - g_j m_{ji}(\boldsymbol{\psi}) - g m_i(\psi)] n_i dS. \quad (3.90)$$

### 3.4.4 Skalierungsstrom

Für ein elastisches Medium mit einer Mikrostruktur, die einer Dilatation unterworfen wird, ist die Skalierungssymmetrie wie im Fall der mikropolaren Elastizität weder eine Variationssymmetrie noch eine Divergenzsymmetrie. Der Grund liegt nämlich darin, daß alle Elastizitätstheorien mit einer Mikrostruktur, innere charakteristische Längen liefern, welche für den Bruch der Selbstähnlichkeit des Mediums verantwortlich sind. Alle Konstanten mit der Dimension einer Länge, die in der potentiellen Energiedichte  $W$  erscheinen, verletzen die Skalierungsinvarianz. Die Skalierungsgruppe für die unabhängigen und abhängigen Variablen lautet in der infinitesimalen Form

$$x'_i = (1 + \varepsilon) x_i, \quad (3.91)$$

$$u'_\alpha = (1 + \varepsilon d_u) u_\alpha, \quad (3.92)$$

$$\psi'_\alpha = (1 + \varepsilon d_\psi) \psi_\alpha, \quad (3.93)$$

$$\psi' = (1 + \varepsilon d_{\bar{\psi}}) \psi, \quad (3.94)$$

wobei  $d_u$ ,  $d_\psi$  und  $d_{\bar{\psi}}$  die Skalierungsdimensionen der Verschiebung  $\mathbf{u}$ , der Mikrorotation  $\boldsymbol{\psi}$  und der skalaren Dilatation  $\psi$  sind. Die infinitesimalen Erzeuger lauten

$$X_i = x_i, \quad U_\alpha = d_u u_\alpha, \quad \Psi_\alpha = d_\psi \psi_\alpha, \quad \Psi = d_{\bar{\psi}} \psi, \quad (3.95)$$

mit den Dimensionen

$$d_u = -\frac{n-2}{2}, \quad d_\psi = -\frac{n}{2}, \quad d_{\bar{\psi}} = -\frac{n}{2}. \quad (3.96)$$

Setzt man die Komponenten des Skalierungsoperators (3.95) in die allgemeine Formel für den Strom (3.74) ein, so ergibt sich der Skalierungsstrom

$$Y_i := A_i = x_j P_{ji} - \frac{1}{2} u_j t_{ji} - \frac{3}{2} \psi_j m_{ji} - \frac{3}{2} \psi m_i. \quad (3.97)$$

Dieser Strom ist auch für ein anisotropes Medium gültig. Aus der Divergenz des Skalierungsstromes erhält man die symmetriebrechende Terme

$$D_i Y_i = -m_{ji} \psi_{i,j} - m_i \psi_{,i}. \quad (3.98)$$

Die Gl. (3.98) ist somit eine Bilanzgleichung. Das wegunabhängige  $M$ -Integral (2.90) für die Skalierung ist in der Elastizität mit Mikrorotation und Mikrodilatation im Gegensatz zur klassischen Elastizität (2.91) ungleich Null und ist somit keine globale Erhaltungsgröße. Mit Hilfe des Divergenztheorems bekommt man

$$M = - \int_V (m_{ji} \psi_{i,j} + m_i \psi_{,i}) dV. \quad (3.99)$$

### 3.5 Mikromorphe Elastizität

Nachdem wir im letzten Abschnitt die Lie-Punkt Symmetrien der Euler-Lagrange Gln., die Variationssymmetrien und Erhaltungssätze für ein elastisches Medium mit Mikrorotation und Mikrodilatation untersucht haben, möchten wir das gleiche für ein mikromorphes Medium tun. Für die Mikrostruktur ist jetzt eine aus einer Mikrorotation, einer Mikrodilatation und einer Mikroverzerrung zusammengesetzte, homogene Mikrodistorion zugelassen. Aus dem Vektor  $\psi_k$  für die Mikrorotation und dem Skalar  $\psi$  für die Mikrodilatation, wird jetzt der Mikrodistorionstensor  $\psi_{kl}$  die entscheidende kinematische Größe zur Beschreibung der mikromorphen Mikrostruktur. Da man schon im letzten Abschnitt mit den nötigen mathematischen Methoden vertraut gemacht hat, wird die Rechnung gleich für die mikromorphe Elastodynamik [80] ausgeführt. Daraus ergeben sich auch die Resultate für die mikromorphe Elastostatik [79]. Der Integrand des Wirkungsfunktional (3.22) ist durch die folgende Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(u_\alpha, \psi_{\alpha\beta}, \dot{u}_\alpha, \dot{\psi}_{\alpha\beta}, u_{\alpha,i}, \psi_{\alpha\beta,i}) \quad (3.100)$$

zu ersetzen. Aus der Bedingung der Stationarität bekommt man die Euler-Lagrange Gln.

$$E_\alpha^u(\mathcal{L}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha} - D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} - D_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} = 0, \quad (3.101)$$

$$E_{\alpha\beta}^\psi(\mathcal{L}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha\beta}} - D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{\alpha\beta}} - D_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha\beta,i}} = 0, \quad (3.102)$$

mit den totalen Ableitungen  $D_t$  und  $D_i$

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + \ddot{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{u}_\alpha} + \dot{u}_{\alpha,j} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha,j}} + \dot{\psi}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha\beta}} + \ddot{\psi}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_{\alpha\beta}} + \dot{\psi}_{\alpha\beta,j} \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha\beta,j}} + \dots, \quad (3.103)$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_{\alpha,i} \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + u_{\alpha,ij} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha,j}} + \dot{u}_{\alpha,i} \frac{\partial}{\partial \dot{u}_\alpha} + \psi_{\alpha\beta,i} \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha\beta}} + \psi_{\alpha\beta,ij} \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha\beta,j}} + \dot{\psi}_{\alpha\beta,i} \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_{\alpha\beta}} + \dots \quad (3.104)$$

Zusätzlich zur Homogenität im Raum  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$ , kommt jetzt die explizite Unabhängigkeit der Lagrangedichte  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$  von der Zeit  $t$  hinzu.  $\mathcal{L}$  setzt sich aus der kinetischen Energie  $T$  und der elastischen Verzerrungsenergie  $W$  folgendermaßen

$$\mathcal{L} = T - W \quad (3.105)$$

zusammen. Dabei ist der Ausdruck für die kinetische Energie  $T$  durch

$$T = \frac{1}{2} p_\alpha \dot{u}_\alpha + \frac{1}{2} p_{\alpha\beta} \dot{\psi}_{\alpha\beta} \quad (3.106)$$

gegeben. Der zweite Term gibt den Anteil an kinetischer Energie, die in der Mikrostruktur steckt. Dabei ist  $v_\alpha = \dot{u}_\alpha$  die Geschwindigkeit eines Makropunktes und  $v_{\alpha\beta} = \dot{\psi}_{\alpha\beta}$  die der Mikrostruktur entsprechend. Mit den Makro und Mikrogeschwindigkeiten sind auch die kanonisch konjugierten Größen

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_k}, \quad p_{kl} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{kl}}, \quad (3.107)$$

gegeben. Dabei ist  $p_k$  der Makroimpuls und  $p_{kl}$  der Mikroimpuls. Die elastische Verzerrungsenergiedichte lautet

$$W = \frac{1}{2} t_{kl} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} s_{kl} e_{kl} + \frac{1}{2} m_{ijk} \kappa_{ijk}. \quad (3.108)$$

Zu den schon angegebenen kinematischen Deformationsgrößen  $\gamma_{kl}$ ,  $e_{kl}$  und  $\kappa_{ijk}$  gehören die Spannungen

$$t_{kl} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{kl}}, \quad s_{kl} = \frac{\partial W}{\partial e_{kl}}, \quad m_{klm} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{klm}}. \quad (3.109)$$

Der Tensor  $t_{kl}$  gilt als Erweiterung des Spannungstensors für ein mikromorphes Medium,  $s_{kl}$  ist der Mikrospannungstensor und  $m_{klm}$  ist der Hyperspannungstensor. Mit den eingeführten dualen Größen bekommt man aus den Gln. (3.101)–(3.102) folgende Ausdrücke für die Euler-Lagrange Gln.

$$D_t p_\alpha - D_i t_{\alpha i} = 0, \quad (3.110)$$

$$D_t p_{\alpha\beta} - D_i m_{\alpha\beta i} - (t_{\alpha\beta} - s_{\alpha\beta}) = 0. \quad (3.111)$$

Die Konstitutivgleichungen für den Makro und Mikroimpuls lauten

$$p_k = \rho \dot{u}_k, \quad (3.112)$$

$$p_{kl} = \rho j \dot{\psi}_{kl}, \quad (3.113)$$

wobei  $\rho$  die Dichte des Makromediums und  $j$  den Trägheitstensor der Mikrostruktur kennzeichnet. Die Materialgleichungen für die Spannungen  $t_{kl}$ ,  $s_{kl}$  und  $m_{klm}$  lauten in der linearen, mikromorphen Elastizität [71]

$$t_{kl} = [\lambda \gamma_{rr} + (\lambda + \nu) e_{rr}] \delta_{kl} + (\mu + \kappa) \gamma_{kl} + \mu \gamma_{lk} + 2(\mu + \sigma) e_{kl}, \quad (3.114)$$

$$s_{kl} = [(\lambda + \nu) \gamma_{rr} + (\lambda + 2\nu + \tau) e_{rr}] \delta_{kl} + (\mu + \sigma) (\gamma_{kl} + \gamma_{lk}) + 2(\mu + 2\sigma + \eta) e_{kl}, \quad (3.115)$$

$$m_{klm} = \tau_1 (\kappa_{mrr} \delta_{kl} + \kappa_{rrk} \delta_{ml}) + \tau_2 (\kappa_{rmr} \delta_{kl} + \kappa_{rrl} \delta_{mk}) + \tau_3 \kappa_{rrm} \delta_{kl} + \tau_4 \kappa_{krr} \delta_{ml} \\ + \tau_5 (\kappa_{rkr} \delta_{ml} + \kappa_{lrr} \delta_{mk}) + \tau_6 \kappa_{rlr} \delta_{mk} + \tau_7 \kappa_{klm} + \tau_8 (\kappa_{lmk} + \kappa_{mkl}) \\ + \tau_9 \kappa_{kml} + \tau_{10} \kappa_{lkm} + \tau_{11} \kappa_{mlk}. \quad (3.116)$$

Setzt man die Materialgleichungen (3.112)–(3.116) in die Euler-Lagrange Gln. (3.110) und (3.111) ein, dann bekommt man die Bewegungsgleichungen der linearen, mikromorphen Elastizität für das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  und das Mikrodistsionsfeld  $\boldsymbol{\psi}$

$$(\mu + \kappa) u_{k,ll} + (\mu + \lambda) u_{l,lk} + \nu \psi_{ll,k} + \sigma \psi_{lk,l} + (\sigma - \kappa) \psi_{kl,l} = \rho \ddot{u}_k, \quad (3.117)$$

$$(\tau_1 + \tau_2) \psi_{rr,lk} + \tau_1 \psi_{mr,rm} \delta_{kl} + \tau_2 \psi_{rm,rm} \delta_{kl} + \tau_3 \psi_{rr,mm} \delta_{kl} + (\tau_4 + \tau_9) \psi_{km,lm} \\ + (\tau_5 + \tau_8) (\psi_{lm,mk} + \psi_{mk,lm}) + (\tau_6 + \tau_{11}) \psi_{ml,mk} + \tau_7 \psi_{kl,mm} + \tau_{10} \psi_{lk,mm} \\ - (\nu u_{r,r} + \tau \psi_{rr}) \delta_{kl} - \sigma u_{l,k} + (\kappa - \sigma) u_{k,l} - \eta \psi_{lk} - (\kappa + \eta) \psi_{kl} = \rho j \ddot{\psi}_{kl}. \quad (3.118)$$

### 3.6 Erhaltungssätze

In der mikromorphen Elastodynamik ist, der aus den unabhängigen und abhängigen Variablen  $(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$  zusammengesetzte Raum ein sechzehndimensionaler Raum. Man führt folgende infinitesimale Transformation für das Variablentupel  $(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi})$  ein

$$x'_i = x_i + \varepsilon X_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) + \dots, \quad (3.119)$$

$$t' = t + \varepsilon \tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) + \dots, \quad (3.120)$$

$$u'_\alpha = u_\alpha + \varepsilon U_\alpha(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) + \dots, \quad (3.121)$$

$$\psi'_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta} + \varepsilon \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) + \dots. \quad (3.122)$$

Die infinitesimale Erzeuger sind

$$X_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) := \left. \frac{\partial x'_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad \tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) := \left. \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad (3.123)$$

$$U_\alpha(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) := \left. \frac{\partial u'_\alpha}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad \Psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) := \left. \frac{\partial \psi'_{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (3.124)$$

Für die Indizes gilt  $i = 1, \dots, n$ ,  $\alpha = 1, \dots, p$  und  $\beta = 1, \dots, p$ . Der infinitesimale Erzeuger wirkt lokal als Vektorfeld

$$\mathbf{v} = X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + U_\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + \Psi_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha\beta}} \quad (3.125)$$

auf den gesamten Raum mit dem Tupel  $(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi})$ . Aus diesem lassen sich seine erste Prolongation

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \bar{U}_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha,i}} + \bar{U}_{\alpha t} \frac{\partial}{\partial \dot{u}_\alpha} + \bar{\Psi}_{\alpha\beta i} \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha\beta,i}} + \bar{\Psi}_{\alpha\beta t} \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_{\alpha\beta}}, \quad (3.126)$$

und die Komponenten dieses Vektorfeldes

$$\bar{U}_{\alpha i} = D_i(U_\alpha - X_k u_{\alpha,k} - \tau \dot{u}_\alpha) + X_k u_{\alpha,ki} + \tau \dot{u}_{\alpha,i}, \quad (3.127)$$

$$\bar{U}_{\alpha t} = D_t(U_\alpha - X_k u_{\alpha,k} - \tau \dot{u}_\alpha) + X_k \dot{u}_{\alpha,k} + \tau \ddot{u}_\alpha, \quad (3.128)$$

gewinnen. Entsprechende Ausdrücke für  $\bar{\Psi}_{\alpha\beta i}$  und  $\bar{\Psi}_{\alpha\beta t}$  erhält man aus den Gln. (3.127)–(3.128), wenn  $u_\alpha$  durch  $\psi_{\alpha\beta}$  und  $U_\alpha$  durch  $\Psi_{\alpha\beta}$  ersetzt werden. Aus den Gln. (3.127) und (3.128) und den erwähnten Substitutionen kann man die Charakteristiken

$$Q_\alpha^u = U_\alpha - X_j u_{\alpha,j} - \tau \dot{u}_\alpha, \quad (3.129)$$

$$Q_{\alpha\beta}^\psi = \Psi_{\alpha\beta} - X_j \psi_{\alpha\beta,j} - \tau \dot{\psi}_{\alpha\beta}, \quad (3.130)$$

für die mikromorphe Elastodynamik angeben. Mit diesen schreibt sich die erste Prolongation (3.126) als

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{v} = \text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_Q + X_i D_i + \tau D_t, \quad (3.131)$$

um, wobei  $\text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_Q$  die Form

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_Q = & Q_\alpha^u \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + D_i Q_\alpha^u \frac{\partial}{\partial u_{\alpha,i}} + D_t Q_\alpha^u \frac{\partial}{\partial \dot{u}_\alpha} + Q_{\alpha\beta}^\psi \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha\beta}} + D_i Q_{\alpha\beta}^\psi \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha\beta,i}} \\ & + D_t Q_{\alpha\beta}^\psi \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_{\alpha\beta}}, \end{aligned} \quad (3.132)$$

besitzt. Aus der Symmetriebedingung (2.134) bekommt man die Lie-Algebra aus den infinitesimalen Symmetrien der Bewegungsgleichungen (3.117)–(3.118):

$$v_i^1 = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{Translation im Raum}), \quad (3.133)$$

$$v^2 = \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{Translation in der Zeit}), \quad (3.134)$$

$$v_i^3 = \epsilon_{ijk} \left( x_j \frac{\partial}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial}{\partial u_k} + \psi_{lj} \frac{\partial}{\partial \psi_{lk}} + \psi_{jl} \frac{\partial}{\partial \psi_{kl}} \right) \quad (\text{Drehung im Raum}), \quad (3.135)$$

$$v^4 = u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \psi_{ij} \frac{\partial}{\partial \psi_{ij}} \quad (\text{Skalierung}), \quad (3.136)$$

und die Symmetrie der Linearität von  $\Delta = 0$

$$v^5 = f_i(x) \frac{\partial}{\partial u_i} + g_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial \phi_{ij}} \quad (\text{Addition von Lösungen}). \quad (3.137)$$

Die Skalierungssymmetrien  $x_i \partial_i$  und  $t \partial_t$ , die sonst in der klassischen Elastizität existieren, sind im Falle eines mikromorphen Materials abwesend.

Das infinitesimale Kriterium (3.68), dessen Erfüllung eine Lie-Gruppe  $G$  zu einer Variationssymmetrie eines elastischen Medium mit Mikrorotation und Mikrodilatation macht, bekommt für den Fall der dynamischen mikromorphen Elastizität folgende Gestalt

$$\text{pr}^{(1)} \mathbf{v}(\mathcal{L}) + \mathcal{L} (D_i X_i + D_t \tau) = D_i B_i + D_t B_4. \quad (3.138)$$

Im Vergleich zu (3.68) taucht jetzt  $\mathcal{L}$  statt  $W$  auf und zusätzlich tritt die Funktion  $\tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi})$  aus der infinitesimalen Transformation (3.120) neu hinzu. Auf der rechten Seite der Gl. (3.138) erscheint im dynamischen Fall für die Divergenz noch der Term  $D_t B_4$  der totalen zeitlichen Ableitung von  $B_4$ . Substituiert man die Gln. (3.131)–(3.132) für die Prolongationsformel in die Gl. (3.138), so ergibt sich

$$\text{pr}^{(1)} \mathbf{v}_Q(\mathcal{L}) + D_i(\mathcal{L} X_i) + D_t(\mathcal{L} \tau) = D_i B_i + D_t B_4, \quad (3.139)$$

mit  $\text{pr}^{(1)} \mathbf{v}_Q$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(1)} \mathbf{v}_Q(\mathcal{L}) = & Q_\alpha^u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha} + Q_{\alpha\beta}^\psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha\beta}} + D_i Q_\alpha^u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} + D_i Q_{\alpha\beta}^\psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha\beta,i}} + D_t Q_\alpha^u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} \\ & + D_t Q_{\alpha\beta}^\psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{\alpha\beta}}. \end{aligned} \quad (3.140)$$



Nach partieller Integration ergibt sich aus obiger Gleichung

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_Q(\mathcal{L}) = & Q_\alpha^u E_\alpha^u(\mathcal{L}) + Q_{\alpha\beta}^\psi E_{\alpha\beta}^\psi(\mathcal{L}) + D_i \left( Q_\alpha^u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} + Q_{\alpha\beta}^\psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha\beta,i}} \right) \\ & + D_t \left( Q_\alpha^u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} + Q_{\alpha\beta}^\psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{\alpha\beta}} \right). \end{aligned} \quad (3.141)$$

Schließlich aus der Kombination der Gln. (3.141) und (3.139) bekommt man aus dem infinitesimalen Kriterium (3.138) die Beziehung

$$D_i A_i + D_t A_4 + Q_\alpha^u E_\alpha^u(\mathcal{L}) + Q_{\alpha\beta}^\psi E_{\alpha\beta}^\psi(\mathcal{L}) = 0, \quad (3.142)$$

mit den Ausdrücken für die Ströme

$$A_i = Q_\alpha^u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} + Q_{\alpha\beta}^\psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha\beta,i}} + \mathcal{L} X_i - B_i, \quad (3.143)$$

$$A_4 = Q_\alpha^u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} + Q_{\alpha\beta}^\psi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{\alpha\beta}} + \mathcal{L} \tau - B_4. \quad (3.144)$$

Da die Euler-Lagrange Gln.  $E_\alpha^u(\mathcal{L}) = 0$  und  $E_{\alpha\beta}^\psi(\mathcal{L}) = 0$  während des gesamten Deformationsprozesses gültig sind, resultiert aus der Gl. (3.142) ein Erhaltungssatz. Mit den Charakteristiken (3.129)–(3.130) erhalten die Gln. (3.143)–(3.144) ihre endgültige Form

$$A_i = (U_\alpha - X_j u_{\alpha,j} - \tau \dot{u}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} + (\Psi_{\alpha\beta} - X_j \psi_{\alpha\beta,j} - \tau \dot{\psi}_{\alpha\beta}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha\beta,i}} + \mathcal{L} X_i - B_i, \quad (3.145)$$

$$A_4 = (U_\alpha - X_j u_{\alpha,j} - \tau \dot{u}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} + (\Psi_{\alpha\beta} - X_j \psi_{\alpha\beta,j} - \tau \dot{\psi}_{\alpha\beta}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{\alpha\beta}} + \mathcal{L} \tau - B_4. \quad (3.146)$$

### 3.6.1 Translationsstrom

Die Translationssymmetrie ist eine Variationssymmetrie mit  $B_i = 0$  und  $B_4 = 0$ . Die Gruppe der Translation wirkt nur auf die unabhängigen Variablen  $(\mathbf{x}, t)$  und läßt die abhängigen Variablen  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi})$  der Verschiebung und der Mikrodistorion unverändert

$$x'_i = x_i + \varepsilon_k \delta_{ki}, \quad t' = t + \varepsilon_4 \delta_{44}, \quad u'_\alpha = u_\alpha, \quad \psi'_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}. \quad (3.147)$$

Die entsprechende infinitesimale Erzeuger lauten

$$X_{ki} = \delta_{ki}, \quad \tau = \delta_{44}, \quad U_\alpha = 0, \quad \Psi_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.148)$$

Aus den Gln. (3.145), (3.146) und unter Benutzung der Gl. (3.148) ergeben sich folgende Ströme

$$A_{ki} = \mathcal{L} \delta_{ki} - u_{\alpha,k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} - \psi_{\alpha\beta,k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha\beta,i}}, \quad (3.149)$$

$$A_{k4} = -u_{\alpha,k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} - \psi_{\alpha\beta,k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{\alpha\beta}}, \quad (3.150)$$

$$A_{4i} = -\dot{u}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} - \dot{\psi}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha\beta,i}}, \quad (3.151)$$

$$A_{44} = \mathcal{L} - \dot{u}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} - \dot{\psi}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{\alpha\beta}}. \quad (3.152)$$

Ausgedrückt mit Hilfe der Spannungen  $t_{\alpha i}$  und  $m_{\alpha\beta i}$  lauten diese

$$P_{ki} := -A_{ki} = -\mathcal{L} \delta_{ki} - u_{\alpha,k} t_{\alpha i} - \psi_{\alpha\beta,k} m_{\alpha\beta i}, \quad (3.153)$$

$$\mathcal{P}_k := A_{k4} = -u_{\alpha,k} p_\alpha - \psi_{\alpha\beta,k} p_{\alpha\beta}, \quad (3.154)$$

$$S_i := A_{4i} = \dot{u}_\alpha t_{\alpha i} + \dot{\psi}_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta i}, \quad (3.155)$$

$$\mathcal{H} := -A_{44} = \dot{u}_\alpha p_\alpha + \dot{\psi}_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} - \mathcal{L}. \quad (3.156)$$

Wir benutzen die Vorzeichenkonvention von [81]. Der Tensor  $P_{ki}$  stellt wie im Fall der Elastizität mit Mikrorotation und Mikrodilatation (3.78) eine Verallgemeinerung des Eschelbyschen Spannungstensors (2.69) der klassischen Elastizität für die mikromorphe Elastodynamik dar. Die Vektorgröße  $\mathcal{P}_k$  ist der Pseudoimpuls. Den Pseudoimpuls für ein mikropolares Medium hat Maugin in seiner Arbeit [82] angegeben. Die Größe  $\mathcal{P}_k$  in der Gl. (3.154) verallgemeinert dessen Resultat für ein mikromorphes Medium. Der Vektor  $S_i$  stellt den materiellen Energiefluß dar und wird auch Poynting Vektor genannt. Er beschreibt die Verallgemeinerung für die mikromorphe Elastizität. Die skalare Größe  $\mathcal{H} = T + W$  ist die Hamiltonian und stellt die Gesamtenergie des elastischen Kontinuums mit einer deformierbaren Mikrostruktur dar. Alle diese Größen erfüllen die Erhaltungssätze

$$D_t \mathcal{P}_k - D_i P_{ki} = 0, \quad (3.157)$$

$$D_t \mathcal{H} - D_i S_i = 0. \quad (3.158)$$

Die Gl. (3.157) ist der Erhaltungssatz für den Pseudoimpuls. Die Gl. (3.158) ist der Erhaltungssatz der Gesamtenergie. Mit Hilfe des Gaußschen Theorems, können die infinitesimalen Erhaltungssätze (3.157)–(3.158) in integraler Form

$$\int_V D_t \mathcal{P}_k dV - \int_S P_{ki} n_i dS = 0, \quad (3.159)$$

$$\int_V D_t \mathcal{H} dV - \int_S S_i n_i dS = 0, \quad (3.160)$$

geschrieben werden. Die Gl. (3.159) ist das  $J_k$ -Integral für die mikromorphe Elastodynamik. Aus der Gl. (3.153) kann man den statischen Eschelbyschen Spannungstensor

der mikromorphen Elastostatik als

$$P_{ki} = W\delta_{ki} - u_{\alpha,k}t_{\alpha i} - \psi_{\alpha\beta,k}m_{\alpha\beta i}, \quad (3.161)$$

ablesen [79].

### 3.6.2 Rotationsstrom

Die Drehung im Raum ist wie die Translation eine Variationssymmetrie, da im infinitesimalen Kriterium (3.138) beide Funktionen  $B_i = 0$  und  $B_4 = 0$  verschwinden. Die Drehgruppe  $SO(3)$  wirkt im Raum  $(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\psi})$  der unabhängigen und abhängigen Variablen. Ihre lokale Wirkung ist durch

$$x'_i = x_i + \epsilon_{kji}x_j\epsilon_k, \quad t' = t, \quad u'_\alpha = u_\alpha + \epsilon_{k\beta\alpha}u_\beta\epsilon_k, \quad \psi'_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta} + \epsilon_{kja}\psi_{j\beta}\epsilon_k + \epsilon_{kjb}\psi_{\alpha j}\epsilon_k \quad (3.162)$$

gegeben. Die infinitesimalen Erzeuger besitzen die Form

$$X_{ik} = \epsilon_{ikj}x_j, \quad \tau = 0, \quad U_{\alpha k} = \epsilon_{\alpha k\beta}u_\beta, \quad \Psi_{\alpha\beta k} = \epsilon_{\alpha kj}\psi_{j\beta} + \epsilon_{\beta kj}\psi_{\alpha j}. \quad (3.163)$$

Wenn diese in die Formeln (3.145) und (3.146) eingesetzt werden, bekommt man die folgenden Ströme

$$A_{ki} = \epsilon_{kmj} \left( x_m \left[ \mathcal{L}\delta_{ij} - u_{\alpha,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} - \psi_{\alpha\beta,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha\beta,i}} \right] + u_m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,i}} + \psi_{ml} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{jl,i}} + \psi_{lm} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{lj,i}} \right), \quad (3.164)$$

$$A_{k4} = \epsilon_{kmj} \left( u_m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_j} + \psi_{ml} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{jl}} + \psi_{lm} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{lj}} - x_m \left[ u_{\alpha,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} + \psi_{\alpha\beta,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{\alpha\beta}} \right] \right), \quad (3.165)$$

welche auch mit Hilfe der Spannungen und Hyperspannungen (3.109)

$$M_{ki} := -A_{ki} = \epsilon_{kmj} (x_m P_{ji} + u_m t_{ji} + \psi_{ml} m_{jli} + \psi_{lm} m_{lji}), \quad (3.166)$$

$$\mathcal{M}_k := A_{k4} = \epsilon_{kmj} (x_m \mathcal{P}_j + u_m p_j + \psi_{ml} p_{jl} + \psi_{lm} p_{lj}) \quad (3.167)$$

ausgedrückt werden können. Die Gl. (3.166) ist der Tensor des totalen Drehimpulses. Man kann ihn wie schon im Abschnitt 3.4.2 gezeigt wurde, in zwei Anteile zerlegen

$$M_{ki} = M_{ki}^{(o)} + M_{ki}^{(i)}, \quad (3.168)$$

Der erste Term in dieser Aufteilung

$$M_{ki}^{(o)} = \epsilon_{kmj} x_m P_{ji}, \quad (3.169)$$

ist der orbitale Drehimpuls und

$$M_{ki}^{(i)} = \frac{1}{2} \epsilon_{kmj} (u_\alpha (\Sigma_{mj})^{\alpha\beta} t_{\beta i} + \psi_{\alpha\mu} (\Sigma_{mj})^{\alpha\beta\mu\nu} m_{\beta\nu i}), \quad (3.170)$$

beschreibt den inneren Drehimpuls. Die Tensorgrößen

$$(\Sigma_{mj})^{\alpha\beta} = \delta_m^\alpha \delta_j^\beta - \delta_j^\alpha \delta_m^\beta, \quad (3.171)$$

$$(\Sigma_{mj})^{\alpha\beta\mu\nu} = (\Sigma_{mj})^{\alpha\beta} \delta^{\mu\nu} + (\Sigma_{mj})^{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta}. \quad (3.172)$$

heißen Spinoperatoren [83]. Der orbitale Drehimpuls  $M_{ki}^{(o)}$  hängt mit der Drehsymmetrie der unabhängigen  $x$ -Koordinaten zusammen, wobei der innere Drehimpuls  $M_{ki}^{(i)}$  aus der Drehsymmetrie des Raumes  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi})$  der abhängigen Variablen stammt. Die Gl. (3.167) ist der Ausdruck für den totalen Pseudodrehimpuls. Dieser läßt sich ebenfalls in zwei Anteile

$$\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_k^{(o)} + \mathcal{M}_k^{(i)} \quad (3.173)$$

zerlegen, nämlich das orbitale Pseudodrehimpuls-Vektorfeld

$$\mathcal{M}_k^{(o)} = \epsilon_{kmj} x_m \mathcal{P}_j \quad (3.174)$$

und das innere Pseudodrehimpuls-Vektorfeld

$$\mathcal{M}_k^{(i)} = \frac{1}{2} \epsilon_{kmj} (u_\alpha (\Sigma_{mj})^{\alpha\beta} p_\beta + \psi_{\alpha\mu} (\Sigma_{mj})^{\alpha\beta\mu\nu} p_{\beta\nu}). \quad (3.175)$$

Was den totalen Drehimpulstensor (3.166) angeht, besitzt er die gleiche Struktur wie in der mikromorphen Elastostatik [79]. Die Isotropiebedingung für die Rotationsinvarianz lautet

$$\begin{aligned} D_t \mathcal{M}_k - D_i M_{ki} = & \epsilon_{knj} (u_{j,i} t_{ni} + u_{i,j} t_{in} + \psi_{ji} (s_{ni} - t_{ni}) + \psi_{ij} (s_{in} - t_{in}) \\ & + \psi_{jl,i} m_{nli} + \psi_{lj,i} m_{lni} + \psi_{li,j} m_{lin}). \end{aligned} \quad (3.176)$$

Wir benutzen die kinematischen Größen (2.15), (3.9) und (3.11)–(3.13) zuzüglich der Gl. (3.10) um die Isotropiebedingung (3.176) umzuformen

$$D_t \mathcal{M}_k - D_i M_{ki} = \epsilon_{knj} (\gamma_{ji} t_{ni} + \gamma_{ij} t_{in} + 2 e_{ij} s_{ni} + \kappa_{jli} m_{nli} + \kappa_{lji} m_{lni} + \kappa_{lij} m_{lin}). \quad (3.177)$$

Setzt man die Materialgleichungen für die Spannungen (3.114), (3.115) und Hyperspannungen (3.116) eines isotropen, mikromorphen Mediums in die Gln. (3.176) und (3.177) ein, dann verschwindet die rechte Seite. Somit erhält man nach Integration und Nutzung des Gaußschen Satzes den globalen Erhaltungssatz des Drehimpulses

$$\int_V D_t \mathcal{M}_k dV - \int_S M_{ki} n_i dS = 0. \quad (3.178)$$

Mit dem totalen Drehimpulstensor (3.166) und Pseudodrehimpulstensor (3.167) stellt das Erhaltungsintegral (3.178) das  $L_k$ -Integral der mikromorphen Elastodynamik dar. Im Fall der Isotropie gilt  $L_k = 0$ . Andererseits wird für ein anisotropes Material  $L_k \neq 0$ , d.h. die Rotationsinvarianz wird gebrochen.

### 3.6.3 Addition von Lösungen

Das Vektorfeld  $v^5$  ist der Erzeuger einer Divergenzsymmetrie. Die dazu gehörenden infinitesimalen Transformationen sind

$$x'_i = x_i, \quad t' = t, \quad u'_\alpha = u_\alpha + \varepsilon f_\alpha, \quad \psi'_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta} + \varepsilon g_{\alpha\beta}, \quad (3.179)$$

wobei die Funktionen  $f_\alpha$  und  $g_{\alpha\beta}$  beliebige Lösungen der Bewegungsgleichungen (3.117)–(3.118) darstellen. Die infinitesimale Erzeuger der Transformation (3.179) lauten

$$X_i = 0, \quad \tau = 0, \quad U_\alpha = f_\alpha, \quad \Psi_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}. \quad (3.180)$$

Mit Hilfe des Betti-Theorems, lassen sich die Funktionen  $B_i$  und  $B_4$

$$B_i = -u_\alpha t_{\alpha i}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) - \psi_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta i}(\mathbf{f}), \quad (3.181)$$

$$B_4 = u_\alpha p_\alpha(\mathbf{f}) + \psi_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}(\mathbf{g}) \quad (3.182)$$

bestimmen. Die Bezeichnungen  $t_{ij}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ ,  $m_{ijk}(\mathbf{f})$  stellen das Ersetzen der Feldvariablen  $u_i$  und  $\psi_{kl}$  durch die Funktionen  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{g}$  entsprechend. Aus der Symmetrie (3.179) resultieren die folgenden erhaltenden Ströme

$$A_i = -f_\alpha t_{\alpha i}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) - g_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta i}(\boldsymbol{\psi}) + u_\alpha t_{\alpha i}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \psi_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta i}(\mathbf{g}), \quad (3.183)$$

$$A_4 = f_\alpha p_\alpha(\mathbf{u}) + g_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\psi}) - u_\alpha p_\alpha(\mathbf{f}) - \psi_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}(\mathbf{g}). \quad (3.184)$$

Diese drücken die Linearität des Gleichungssystems (3.117)–(3.118) aus. Aus dem Gaußschen Satz kann auch der Erhaltungssatz in integraler Form

$$\begin{aligned} \int_S (u_\alpha t_{\alpha i}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) + \psi_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta i}(\mathbf{g}) - f_\alpha t_{\alpha i}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}) - g_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta i}(\boldsymbol{\psi})) n_i dS = \\ \int_V D_t (u_\alpha p_\alpha(\mathbf{f}) + \psi_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}(\mathbf{g}) - f_\alpha p_\alpha(\mathbf{u}) - g_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\psi})) dV, \end{aligned} \quad (3.185)$$

angegeben werden.

### 3.6.4 Skalierungsstrom

Der Symmetriebruch der Skalierung vom Abschnitt 3.4.4 vererbt sich natürlich weiter auf ein mikromorphes Medium. In einem mikromorphen Medium existieren auch innere, charakteristische Längen, die den selbstähnlichen Charakter des Materials für unterschiedliche Dimensionsskalen zerstören. Die infinitesimale Form der Skalierungsgruppe der unabhängigen und abhängigen Variablen lautet

$$x'_i = (1 + \varepsilon)x_i, \quad t' = (1 + \varepsilon)t, \quad u'_\alpha = (1 + \varepsilon d_u)u_\alpha, \quad \psi'_{\alpha\beta} = (1 + \varepsilon d_\psi)\psi_{\alpha\beta}, \quad (3.186)$$

wobei  $d_u$  und  $d_\psi$  die Skalierungsdimensionen des Verschiebungsfeldes  $u_k$  und des Mikrodistorstionsensors  $\boldsymbol{\psi}$  sind. Die infinitesimale Erzeuger der Transformation (3.186) sind durch

$$X_i = x_i, \quad \tau = t, \quad U_\alpha = d_u u_\alpha, \quad \Psi_{\alpha\beta} = d_\psi \psi_{\alpha\beta}, \quad (3.187)$$

mit den Dimensionen

$$d_u = -\frac{d-2}{2}, \quad d_\psi = -\frac{d}{2}, \quad d = n+1, \quad (3.188)$$

gegeben. Dabei steht  $n$  für die räumliche Dimension ( $n = 3$  für den dreidimensionalen Raum). Wenn die Erzeuger der Skalierung (3.187) in die Gln. (3.145) und (3.146) eingesetzt werden, dann erhält man folgende Ströme

$$A_i = x_i \mathcal{L} + (d_u u_\alpha - x_k u_{\alpha,k} - t \dot{u}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} + (d_\psi \psi_{\alpha\beta} - x_k \psi_{\alpha\beta,k} - t \dot{\psi}_{\alpha\beta}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha\beta,i}}, \quad (3.189)$$

$$A_4 = t \mathcal{L} + (d_u u_\alpha - x_i u_{\alpha,i} - t \dot{u}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} + (d_\psi \psi_{\alpha\beta} - x_k \psi_{\alpha\beta,k} - t \dot{\psi}_{\alpha\beta}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{\alpha\beta}}. \quad (3.190)$$

Mit Hilfe des Makroimpulses  $p_k$ , des Mikroimpulses  $p_{kl}$ , der Spannungen  $\sigma_{kl}$  und Hyperspannungen  $m_{klm}$  können die Skalierungsströme in die Form

$$Y_i := -A_i = x_j P_{ji} - t S_i + d_u u_\alpha t_{\alpha i} + d_\psi \psi_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta i}, \quad (3.191)$$

$$\mathcal{Y} := A_4 = x_j \mathcal{P}_j - t \mathcal{H} + d_u u_\alpha p_\alpha + d_\psi \psi_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}, \quad (3.192)$$

gebracht werden. In den Gln. (3.191) und (3.192) beschreiben die ersten zwei Terme die orbitale Skalierungsströme und die letzten zwei Terme sind der Beitrag der inneren Skalierungsströme. Da die Skalierungssymmetrie keine Variationssymmetrie ist, erfüllen die Skalierungsströme keinen Erhaltungssatz sondern eine Bilanzgleichung

$$D_t \mathcal{Y} - D_i Y_i = -(\dot{\psi}_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} - \psi_{\alpha\beta,i} m_{\alpha\beta i}). \quad (3.193)$$

Auf der rechten Seite der Bilanzgleichung (3.193) ist das erste Glied innerhalb der Klammer das zweifache der kinetischen Energie der Mikrostruktur und das zweite Glied stellt das doppelte des Termes  $-\frac{1}{2} m_{klm} \kappa_{klm}$  der elastischen Mikroverzerrungsenergie in der Gl. (3.108). Die integrale Form der Bilanzgleichung (3.193) ist durch

$$\int_V D_t \mathcal{Y} dV - \int_S Y_i n_i dS = - \int_V (\dot{\psi}_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} - \psi_{\alpha\beta,i} m_{\alpha\beta i}) dV \quad (3.194)$$

gegeben.

# Kapitel 4

## Gradientenelastizität

Im Anschluß an das letzte Kapitel werden wir für ein Kontinuum mit einer allgemein deformierbaren Mikrostruktur eine Einschränkung in der Kinematik verlangen. Dadurch ergibt sich aus der linearen mikromorphen Elastizität die lineare Gradientenelastizität. Die kinematische Zwangsbedingung ist das Verschwinden der relativen Distorsion  $\gamma_{ij} = 0$ , man identifiziert also die Mikrostruktur mit dem umgebenden Makromedium. Diese spezielle Kinematik wird in der Arbeit [36] diskutiert. Es werden aus der Elastizitätstheorie mit Mikrostruktur drei Formen der Gradientenelastizität hergeleitet, die alle auf die gleiche Differentialgleichung für das Verschiebungsfeld führen. Die Kinematik verändert sich nach den Gln. (3.9) und (3.10) folgendermaßen

$$\gamma_{\alpha j} = 0, \quad \psi_{\alpha j} = u_{\alpha,j}, \quad \kappa_{\alpha jk} = u_{\alpha,jk}, \quad (4.1)$$

d.h. die Mikrodistorion wird jetzt zur Distorsion des Makromediums und der Mikrodistorionsgradient wird zum Distorsionsgradienten, welcher die zweite räumliche Ableitung des Verschiebungsfeldes  $u_{i,jk}$  darstellt. Die elastisch gespeicherte Verzerrungsenergie eines solchen Mediums hat die Form

$$W = \frac{1}{2} \tau_{\alpha j} u_{\alpha,j} + \frac{1}{2} \tau_{\alpha jk} u_{\alpha,jk}. \quad (4.2)$$

Die höheren Kraftspannungen werden jetzt als Reaktionsmomente auf die höhere, zweite Ableitung des Verschiebungsfeldes verstanden. Die Geschwindigkeit des Mikrodistorionsgradienten  $\dot{\psi}_{ij}$  wandelt sich nach der kinematischen Einschränkung (4.1) zum räumlichen Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes  $\dot{u}_{i,j}$  um. In dieser Arbeit werden wir annehmen, daß der Betrag des Geschwindigkeitsgradienten  $|\dot{u}_{i,j}| \ll |\dot{u}_i|$  in jedem materiellen Punkt immer viel kleiner als der Betrag der Geschwindigkeit selbst bleibt. In der Arbeit [90] findet man die Herleitung der Erhaltungssätze und Bilanzgleichungen in der Gradientenelastizität mit einer Lagrangedichte, in welcher der Geschwindigkeitsgradient  $\dot{u}_{i,j}$  mitberücksichtigt wird. Für die in diesem Kapitel gewählte Einschränkung kann die Größe  $\dot{u}_{i,j}$  in der kinetischen Energie des Mediums vernachlässigt werden. Damit ergibt sich die Lagrangedichte als

$$\mathcal{L} = T - W = \frac{1}{2} p_\alpha \dot{u}_\alpha - \frac{1}{2} \tau_{\alpha j} u_{\alpha,j} - \frac{1}{2} \tau_{\alpha jk} u_{\alpha,jk}. \quad (4.3)$$

Aus der Lagrangedichte (4.3) folgen, die zu den kinematischen Größen der Distorsion und des Distorsionsgradienten, dualen Größen der Kraftspannungen und Hyperspannungen

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha}, \quad \tau_{\alpha j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,j}}, \quad \tau_{\alpha jk} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,jk}}, \quad (4.4)$$

dabei ist  $p_\alpha$  der physikalische Impuls,  $\tau_{\alpha j}$  der Kraftspannungstensor und  $\tau_{\alpha jk}$  der Hyperspannungstensor. Die Euler-Lagrange Gln., die man aus der Variation nach der Feldvariable  $u_i$  und Minimierung des Wirkungsfunktional mit der Lagrangedichte (4.3) bekommt, lauten

$$E_\alpha^u(\mathcal{L}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\alpha} - D_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} - D_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} + D_i D_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,ij}} = 0, \quad (4.5)$$

welche ausgedrückt mit dem Impuls, den Kraftspannungen und Hyperspannungen (4.4) die Form

$$D_t p_\alpha - D_j (\tau_{\alpha j} - D_k \tau_{\alpha jk}) = 0. \quad (4.6)$$

annehmen. Dabei beschreiben  $D_t$  und  $D_i$  die totalen Ableitungen:

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + \ddot{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{u}_\alpha} + \dot{u}_{\alpha,j} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha,j}} + \dots, \quad (4.7)$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_{\alpha,i} \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + u_{\alpha,ij} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha,j}} + \dot{u}_{\alpha,i} \frac{\partial}{\partial \dot{u}_\alpha} + u_{\alpha,ijk} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha,jk}} + \dots. \quad (4.8)$$

Als Konsitutivgleichungen für den Impuls  $p_\alpha$ , die Spannungen  $\tau_{\alpha j}$  und die Hyperspannungen  $\tau_{\alpha jk}$  wählt man für ein linear elastisches isotropes Medium folgende Beziehungen

$$p_\alpha = \rho \dot{u}_\alpha, \quad (4.9)$$

$$\tau_{\alpha j} = \mu(u_{\alpha,j} + u_{j,\alpha}) + \lambda \delta_{\alpha j} u_{k,k}, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha jk} = & a_1 (\delta_{\alpha j} u_{l,lk} + \delta_{\alpha k} u_{l,lj}) + \frac{1}{2} a_2 (\delta_{\alpha j} u_{k,ll} + \delta_{\alpha k} u_{j,ll} + 2\delta_{jk} u_{l,l\alpha}) \\ & + 2a_3 \delta_{jk} u_{\alpha,ll} + 2a_4 u_{\alpha,jk} + a_5 (u_{j,k\alpha} + u_{k,j\alpha}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

welche eingesetzt in die Euler-Lagrange Gln. (4.6) drei Differentialgleichungen für das Vektorfeld der Verschiebung  $u_i$

$$\rho \ddot{u}_\alpha - \mu [1 - \ell_1^2 \Delta] \Delta u_\alpha - (\lambda + \mu) [1 - \ell_2^2 \Delta] u_{j,j\alpha} = 0, \quad (4.12)$$

ergeben. Man bekommt die zwei inneren Längen

$$\ell_1^2 = 2 \frac{a_3 + a_4}{\mu}, \quad \ell_2^2 = 2 \frac{a_1 + a_2 + a_5}{\lambda + \mu}. \quad (4.13)$$



Die Gl. (4.12) beschreibt ein System von drei linearen partiellen Differentialgleichungen vierter Ordnung  $\Delta \equiv (\Delta_1, \dots, \Delta_3) = 0$ . Zu den Laméschen Konstanten  $\mu$  und  $\lambda$  für den Spannungstensor  $\tau_{\alpha j}$  erscheinen jetzt als zusätzliche Materialkoeffizienten fünf Gradientenkoeffizienten  $a_1, \dots, a_5$  für den Hyperspannungstensor  $\tau_{\alpha jk}$ . Die elastisch gespeicherte Energie eines Mediums, welches die zweite Ableitung des Verschiebungsfeldes mitberücksichtigt, kann die möglichen Formen

$$W(\boldsymbol{\beta}, \text{grad}\boldsymbol{\beta}), \quad \text{Gradientenelastizität}, \quad (4.14)$$

$$W(\mathbf{e}, \text{grade}), \quad \text{Verzerrungsgradientenelastizität}, \quad (4.15)$$

$$W(\boldsymbol{\beta}, \text{rot}\boldsymbol{\beta}), \quad \text{Versetzungstheorie}, \quad (4.16)$$

$$W(\mathbf{e}, \text{rote}), \quad \text{Elastizität mit Momentenspannungen}, \quad (4.17)$$

annehmen. Wir haben den ersten Typ gewählt. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß für ein inkompatibles elastisches Medium mit Versetzungen nur die dritte Form geeignet ist. Aus dieser wird dann die vierte Form als spezieller Grenzfall in Erscheinung treten. Die zweite Form der potentiellen Energie findet auch in der Mikroplastizität ( $\mu m$  Bereich) als Verzerrungsgradientenplastizität (“Strain-gradient plasticity”) Anwendung. Mit dieser Theorie versucht man, die in Abhängigkeit von der Abmessung der Probe unterschiedlich große Zunahme der Verfestigung zu erklären. Das Materialverhalten zeigt Längeneffekte (“size-effects”). Für das Verständnis der Verfestigung in solchen Dimensionen braucht man eine Theorie mit inneren Längen. Damit kann die phänomenologische Plastizität so verifiziert werden, daß sie die Längeneffekte für Proben im  $\mu m$ -Bereich erfassen kann. Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit dem Ausrechnen der Lie-Punkt Symmetrien von der Gl. (4.12) und der Variationssymmetrien der Lagrangedichte (4.3). Aus den Symmetrien letzterer, wird man nach dem Noetherschen Theorem wichtige Erhaltungssätze gewinnen.

## 4.1 Lie-Punkt Symmetrien

Man möchte die Lie-Gruppen angeben, die das Gleichungssystem (4.12) invariant lassen. Der Raum der Variablen besteht aus den unabhängigen räumlichen Ortsvariablen  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und der zeitlichen Variable  $t \in \mathbb{R}$ . Das vektorwertige Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  ist die abhängige Variable. Alle Variablen zusammen existieren in einem höher-dimensionalen Raum  $(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$  (in unserem Fall ist  $n = 3$  und  $p = 3$ ). Sei  $G$  die Lie-Gruppe welche die Gl. (4.12) invariant läßt. Die infinitesimale Transformationsgruppe lautet

$$x'_i = x_i + \varepsilon X_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) + \dots, \quad (4.18)$$

$$t' = t + \varepsilon \tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) + \dots, \quad (4.19)$$

$$u'_\alpha = u_\alpha + \varepsilon U_\alpha(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) + \dots, \quad (4.20)$$

mit den Komponenten des infinitesimalen Erzeugers von  $G$  gegeben durch

$$X_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) := \left. \frac{\partial x'_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad \tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) := \left. \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad U_\alpha(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) := \left. \frac{\partial u'_\alpha}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad (4.21)$$

wobei  $\varepsilon$  den Gruppenparameter darstellt. Für die einzelnen Indizes gilt  $i = 1, \dots, n$  and  $\alpha = 1, \dots, p$ . Mit dem Vektorfeld  $\mathbf{v}$  von  $G$

$$\mathbf{v} = X_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial t} + U_\alpha(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial u_\alpha}. \quad (4.22)$$

ist der infinitesimale Erzeuger gegeben. Man kann die zweite Prolongation von  $\mathbf{v}$  berechnen

$$\text{pr}^{(2)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \bar{U}_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha, i}} + \bar{U}_{\alpha t} \frac{\partial}{\partial \dot{u}_\alpha} + \bar{U}_{\alpha ij} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha, ij}} + \bar{U}_{\alpha tt} \frac{\partial}{\partial \ddot{u}_\alpha}, \quad (4.23)$$

wobei

$$\bar{U}_{\alpha i} = D_i(U_\alpha - X_k u_{\alpha, k} - \tau \dot{u}_\alpha) + X_k u_{\alpha, ki} + \tau \dot{u}_{\alpha, i}, \quad (4.24)$$

$$\bar{U}_{\alpha t} = D_t(U_\alpha - X_k u_{\alpha, k} - \tau \dot{u}_\alpha) + X_k \dot{u}_{\alpha, k} + \tau \ddot{u}_\alpha, \quad (4.25)$$

$$\bar{U}_{\alpha ij} = D_i D_j(U_\alpha - X_k u_{\alpha, k} - \tau \dot{u}_\alpha) + X_k u_{\alpha, kij} + \tau \dot{u}_{\alpha, ij}, \quad (4.26)$$

$$\bar{U}_{\alpha tt} = D_t D_t(U_\alpha - X_k u_{\alpha, k} - \tau \dot{u}_\alpha) + X_k \ddot{u}_{\alpha, k} + \tau \ddot{u}_\alpha, \quad (4.27)$$

die Ausdrücke für die höheren Komponenten des zweiten Prolongationsvektorfeldes (4.23) sind. Mit Hilfe der Charakteristik  $Q_\alpha^u$

$$Q_\alpha^u = U_\alpha - X_j u_{\alpha, j} - \tau \dot{u}_\alpha, \quad (4.28)$$

von  $\mathbf{v}$ , kann man die zweite Prolongation (4.23) folgendermaßen

$$\text{pr}^{(2)}\mathbf{v} = \text{pr}^{(2)}\mathbf{v}_Q + X_i D_i + \tau D_t, \quad (4.29)$$

umschreiben. Das erste Glied in der Gl. (4.29) lautet

$$\text{pr}^{(2)}\mathbf{v}_Q = Q_\alpha^u \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + D_i Q_\alpha^u \frac{\partial}{\partial u_{\alpha, i}} + D_t Q_\alpha^u \frac{\partial}{\partial \dot{u}_\alpha} + D_i D_j Q_\alpha^u \frac{\partial}{\partial u_{\alpha, ij}} + D_t D_t Q_\alpha^u \frac{\partial}{\partial \ddot{u}_\alpha}. \quad (4.30)$$

Das infinitesimale Kriterium (2.134) ist jetzt folgendermaßen

$$\text{pr}^{(4)}\mathbf{v}(\Delta) = 0, \quad \text{mit} \quad \Delta = 0, \quad (4.31)$$

anzuwenden. Der Operator  $\text{pr}^{(4)}\mathbf{v}$  bezeichnet dabei die Prolongation vierter Ordnung. Angewandt auf die Euler-Lagrange Gln. (4.12), findet man aus dem Kriterium (4.31) eine Bestimmungsgleichung für die Komponente  $U_\alpha(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$  des infinitesimalen Erzeugers (4.22)

$$[\rho \ddot{\bar{U}}_\alpha - \mu [1 - \ell_1^2 \Delta] \Delta \bar{U}_\alpha - (\lambda + \mu) [1 - \ell_2^2 \Delta] \bar{U}_{j, j\alpha} = 0]_{\Delta=0}, \quad (4.32)$$

Die Lösung der Bestimmungsgleichung (4.32) liefert die Lie-Algebra der infinitesimalen Symmetrien der Euler-Lagrange Gln. (4.12). Sie wird von den folgenden Lie-Symmetrien

$$v_i^1 = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{Translation im Raum}), \quad (4.33)$$

$$v^2 = \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{Translation in der Zeit}), \quad (4.34)$$

$$v_i^3 = \epsilon_{ijk} \left( x_j \frac{\partial}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial}{\partial u_k} \right) \quad (\text{Rotation im Raum}), \quad (4.35)$$

$$v^4 = u_i \frac{\partial}{\partial u_i} \quad (\text{Skalierung}), \quad (4.36)$$

$$(4.37)$$

aufgespannt. Aus der Linearität des Systems (4.12) bekommt man zusätzlich die infinitesimale Symmetrie

$$v^5 = f_i(x) \frac{\partial}{\partial u_i} \quad (\text{Addition von Lösungen}), \quad (4.38)$$

Die Funktion  $f_i(x)$  stellt eine beliebige Lösung von (4.12) dar. Wie schon im Abschnitt 3.4.2 erwähnt wurde, setzt sich der infinitesimale Operator der Drehungen  $\mathbf{v}^3$  aus zwei Anteilen zusammen. Der erste Anteil ist der Erzeuger des räumlichen (orbitalen) Drehimpulses. Der zweite Anteil erzeugt den inneren Drehimpuls. Das Vektorfeld  $\mathbf{v}^4$  ist der Erzeuger der Skalierung der abhängigen Variablen. Im Gegensatz zur klassischen Elastizität, ist die Skalierung der unabhängigen Variablen  $\mathbf{v} = \mathbf{x} \partial_{\mathbf{x}}$  genauso wie in der Elastizität mit Mikrostruktur keine Symmetrie der Euler-Lagrange Gln. (4.12).

## 4.2 Erhaltungssätze

Man hat im Kapitel 3, als man die mikromorphe Elastodynamik behandelte, gezeigt, daß ein lokaler Erhaltungssatz für das Gleichungssystem  $\Delta = 0$  die allgemeine Form

$$D_t A_4 + D_i A_i = 0, \quad (4.39)$$

besitzt.  $A_i$  ist dabei die vektorwertige Flußdichte und  $A_4$  beschreibt die Dichte einer Größe die erhalten bleibt. Mit Hilfe des Gaußschen Theorems gelangt man aus dem lokalen Erhaltungssatz (4.39) zum folgenden globalen Erhaltungssatz

$$\int_S A_i n_i dS + \int_V D_t A_4 dV = 0, \quad (4.40)$$

mit  $n_i$  als Einheitsnormale auf der Oberfläche  $S$ , die das Volumen  $V$  umschließt. Die infinitesimale Bedingung (3.138) gilt hier weiterhin mit dem einzigen Unterschied, daß

man jetzt die zweite Prolongation benutzen muß. Eine Lie-Punkt Symmetrie ist eine Variationssymmetrie in der Gradientenelastizität wenn folgendes

$$\text{pr}^{(2)}\mathbf{v}(\mathcal{L}) + \mathcal{L} (D_i X_i + D_t \tau) = D_i B_i + D_t B_4, \quad (4.41)$$

gilt. Setzt man die Prolongationsformel (4.29) in die Bedingung (4.41) ein, so erhält man die Beziehung

$$D_i B_i + D_t B_4 = \text{pr}^{(2)}\mathbf{v}_Q(\mathcal{L}) + D_i(\mathcal{L} X_i) + D_t(\mathcal{L} \tau), \quad (4.42)$$

mit

$$\text{pr}^{(2)}\mathbf{v}_Q(\mathcal{L}) = D_i Q_\alpha^u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} + D_t Q_\alpha^u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} + D_i D_j Q_\alpha^u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,ij}}. \quad (4.43)$$

Benutzt man die Gl. (4.43), so kann der erste Term auf der rechten Seite der Gl. (4.42) partiell integriert werden

$$\text{pr}^{(2)}\mathbf{v}_Q(\mathcal{L}) = Q_\alpha^u E_\alpha(\mathcal{L}) + D_i \left( Q_\alpha^u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} + D_j Q_\alpha^u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,ij}} - Q_\alpha^u D_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,ij}} \right) + D_t \left( Q_\alpha^u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} \right). \quad (4.44)$$

Aus den Gln. (4.42) und (4.44) bekommt man unter Verwendung der Euler-Lagrange Gln.  $E_\alpha(\mathcal{L}) = 0$  schließlich die folgenden Ströme:

$$A_i = Q_\alpha^u \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} - D_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,ij}} \right] + D_j Q_\alpha^u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,ij}} + \mathcal{L} X_i - B_i, \quad (4.45)$$

$$A_4 = Q_\alpha^u \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} + \mathcal{L} \tau - B_4. \quad (4.46)$$

Schließlich bekommt man mit der Charakteristik (4.28) für die obigen Ströme

$$A_i = \mathcal{L} X_i + (U_\alpha - X_k u_{\alpha,k} - \tau \dot{u}_\alpha) \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} - D_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,ij}} \right] + \left( \frac{\partial U_\alpha}{\partial x_j} + u_{\beta,j} \frac{\partial U_\alpha}{\partial u_\beta} - u_{\alpha,k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} - u_{\alpha,k} u_{\beta,j} \frac{\partial X_k}{\partial u_\beta} - X_k u_{\alpha,kj} - \dot{u}_\alpha \frac{\partial \tau}{\partial x_j} - \dot{u}_\alpha u_{\beta,j} \frac{\partial \tau}{\partial u_\beta} - \tau \dot{u}_{\alpha,j} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,ij}} - B_i, \quad (4.47)$$

$$A_4 = \mathcal{L} \tau + (U_\alpha - X_k u_{\alpha,k} - \tau \dot{u}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} - B_4. \quad (4.48)$$

### 4.2.1 Translationsstrom

Die Translationsgruppe wirkt nur auf die unabhängigen Variablen. Die Translation in Raum und Zeit ist gegeben durch die folgenden Transformationen:

$$x'_i = x_i + \varepsilon_k \delta_{ki}, \quad (4.49)$$

$$t' = t + \varepsilon_4 \delta_{44}, \quad (4.50)$$

$$u'_\alpha = u_\alpha. \quad (4.51)$$

Die entsprechenden Erzeuger der infinitesimalen Transformation lauten

$$X_{ki} = \delta_{ki}, \quad \tau = \delta_{44}, \quad U_\alpha = 0. \quad (4.52)$$

Mit diesen ergeben sich die Ströme der Translation

$$A_{ki} = \mathcal{L} \delta_{ki} - u_{\alpha,k} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} - D_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,ij}} \right) - u_{\alpha,kj} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,ij}}, \quad (4.53)$$

$$A_{k4} = -u_{\alpha,k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha}, \quad (4.54)$$

$$A_{4i} = -\dot{u}_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} - D_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,ij}} \right) - \dot{u}_{\alpha,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,ij}}, \quad (4.55)$$

$$A_{44} = \mathcal{L} - \dot{u}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha}. \quad (4.56)$$

Setzt man in den Strömen (4.53)–(4.56) die Spannungen aus der Gl. (4.4) ein, dann erhält man

$$P_{ki} := -A_{ki} = -\mathcal{L} \delta_{ki} - u_{\alpha,k} (\tau_{\alpha i} - D_j \tau_{\alpha ij}) - u_{\alpha,kj} \tau_{\alpha ij}, \quad (4.57)$$

$$\mathcal{P}_k := A_{k4} = -u_{\alpha,k} p_\alpha, \quad (4.58)$$

$$S_i := A_{4i} = \dot{u}_\alpha (\tau_{\alpha i} - D_j \tau_{\alpha ij}) + \dot{u}_{\alpha,j} \tau_{\alpha ij}, \quad (4.59)$$

$$\mathcal{H} := -A_{44} = \dot{u}_\alpha p_\alpha - \mathcal{L}. \quad (4.60)$$

Für die Ströme (4.57)–(4.60) gelten die lokalen Erhaltungssätze

$$D_t \mathcal{P}_k - D_i P_{ki} = 0, \quad (4.61)$$

$$D_t \mathcal{H} - D_i S_i = 0. \quad (4.62)$$

Die Gl. (4.61) stellt die Verallgemeinerung für den dynamischen Fall der Erhaltung des Eshelbyschen Spannungstensors und des Vektors des Pseudoimpulses in der Gradientenelastizität dar. Die Gl. (4.62) ist der Energieerhaltungssatz der Gradientenelastizität. Mit Hilfe des Gaußschen-Satzes, können die globalen Erhaltungssätze für den Impuls und die Energie

$$\int_V D_t \mathcal{P}_k dV - \int_S P_{ki} n_i dS = 0, \quad (4.63)$$

$$\int_V D_t \mathcal{H} dV - \int_S S_i n_i dS = 0, \quad (4.64)$$

erhalten werden. Durch partielle Differentiation, formt man die Gl. (4.57) folgendermaßen

$$P_{ki} = -[\mathcal{L} \delta_{ki} + u_{\alpha,k} \tau_{\alpha i} + 2u_{\alpha,kj} \tau_{\alpha ij}] + D_j (u_{\alpha,k} \tau_{\alpha ij}), \quad (4.65)$$

um. Die Gl. (4.65) hat die Form des ‘effektiven’ Eshelbyschen Spannungstensors der Gradientenelastizität. Diese Form findet man in den Arbeiten [103, 81, 100]. Werden

alle Gradiententerme in den Gln. (4.57)–(4.60) vernachlässigt, so findet man wieder die Formeln für die Elastodynamik [65, 31]. Vernachlässigt man den Term der kinetischen Energie in der Lagrangedichte  $\mathcal{L}$ , so stimmt Gl. (4.57) mit dem zum ersten Mal von Eshelby [59, 93] angegebenen Ausdruck überein. Somit findet man in der Gradientenelastizität den statischen Eshelbyschen Spannungstensor [59, 93] wieder:

$$P_{ki} = W\delta_{ki} - u_{\alpha,k}(\tau_{\alpha i} - D_j \tau_{\alpha ij}) - u_{\alpha,kj} \tau_{\alpha ij}. \quad (4.66)$$

Für das  $J_k$ -Integral (2.71) bekommt man mit Gl. (4.65) den integralen Erhaltungssatz

$$J_k := \int_S P_{ki} n_i dS = 0. \quad (4.67)$$

Es stellt das von der Elastizität auf die Gradientenelastizität verallgemeinerte  $J_k$ -Integral dar.  $J_1$  bezeichnet man auch als Rice-Integral der Gradientenelastizität. Es wurde schon früher von Chen und Georgiadis [92, 95] sowie von Georgiadis und Grentzelou [97] hergeleitet.

### 4.2.2 Rotationsstrom

Die dreidimensionale Rotationsgruppe  $SO(3)$  wirkt im Raum der unabhängigen und abhängigen Variablen zugleich (siehe auch Gl. (4.35)). Ihre infinitesimale Wirkung ist durch die Transformationen

$$x'_i = x_i + \epsilon_{kji} x_j \varepsilon_k, \quad t' = t, \quad u'_\alpha = u_\alpha + \epsilon_{k\beta\alpha} u_\beta \varepsilon_k, \quad (4.68)$$

gegeben. Daraus erhält man leicht die infinitesimalen Erzeuger

$$X_{ik} = \epsilon_{ikj} x_j, \quad \tau = 0, \quad U_{\alpha k} = \epsilon_{\alpha k\beta} u_\beta. \quad (4.69)$$

Mit diesen Erzeugern und mit  $B_i = B_4 = 0$  bekommt man aus den hergeleiteten Formeln (4.47) und (4.48) die folgenden Rotationsströme

$$\begin{aligned} A_{ki} = & \epsilon_{kmj} x_m \left( \mathcal{L} \delta_{ij} - u_{\alpha,j} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} - D_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,il}} \right] - u_{\alpha,jl} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,il}} \right) \\ & + \epsilon_{km\alpha} u_m \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} - D_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,il}} \right) + \epsilon_{km\alpha} u_{m,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,ij}} + \epsilon_{kmj} u_{\alpha,m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,ij}}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$A_{k4} = \epsilon_{ijk} (u_j \delta_{il} - x_j u_{l,i}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_l}, \quad (4.71)$$

welche, ausgedrückt mit Hilfe der Spannungen und Momentenspannungen (4.4), die Form

$$M_{ki} := -A_{ki} = \epsilon_{kmj} (x_m P_{ji} + u_m [\tau_{ji} - D_l \tau_{jil}] + u_{m,l} \tau_{jil} + u_{l,m} \tau_{lij}), \quad (4.72)$$

$$\mathcal{M}_k := A_{k4} = \epsilon_{kmj} (x_m \mathcal{P}_j + u_m p_j), \quad (4.73)$$

annehmen. Der Tensor  $M_{ki}$  ist der totale Drehimpulstensor in der Gradientenelastizität. Dieser setzt sich additiv aus den drei Anteilen

$$M_{ki} = M_{ki}^{(o)} + M_{ki}^{(i)} + M_{ki}^{(a)}, \quad (4.74)$$

zusammen. Diese lauten im einzelnen

$$M_{ki}^{(o)} = \epsilon_{kmj} x_m P_{ji}, \quad (4.75)$$

$$M_{ki}^{(i)} = \epsilon_{kmj} (u_m [\tau_{ji} - D_l \tau_{jl}] + u_{m,l} \tau_{jl} - \dot{u}_m p_{ji}), \quad (4.76)$$

$$M_{ki}^{(a)} = \epsilon_{kmj} u_{l,m} \tau_{lij}. \quad (4.77)$$

Die Größe  $M_{ki}^{(o)}$  ist der orbitale Drehimpulstensor, und  $M_{ki}^{(i)}$  ist der innere Drehimpulstensor. Der Tensor  $M_{ki}^{(a)}$  stellt einen zusätzlichen Drehimpulstensor, der in der klassischen Elastizitätstheorie nicht existiert [98]. Er entsteht genauso wie der orbitale Drehimpuls (4.75) aus der Rotationstransformation der unabhängigen Variablen. Vernachlässigt man wie für den Fall der Translation alle Gradiententerme in den Gln. (4.72) und (4.73), so ergibt sich auch für die Rotation die Formel der Elastodynamik [31]. Aus den Gln. (4.39), (4.72) und (4.73) ergibt sich die Isotropiebedingung der Gradientenelastizität

$$\epsilon_{kmj} (u_{m,i} \tau_{ji} + u_{i,m} \tau_{ij} + u_{l,mi} \tau_{lij} + u_{m,li} \tau_{jl} + u_{i,ml} \tau_{ijl}) = 0. \quad (4.78)$$

Diese ist eine Erweiterung der Eshelbyschen Isotropiebedingung [59] für die Gradientenelastizität. Offensichtlich folgt diese immer aus der Isotropie des Materials. Somit sind die Gl. (4.78) nur dann erfüllt, wenn das Material die Eigenschaft der Isotropie besitzt. Mit den Materialgleichungen (4.9)–(4.11) kann gezeigt werden, daß die linke Seite der Gl. (4.78) verschwindet. Der Erhaltungssatz des totalen Drehimpulstensors und des Vektors des Pseudodrehimpulses lautet

$$D_t \mathcal{M}_k - D_i M_{ki} = 0. \quad (4.79)$$

Der globale Erhaltungssatz der Rotation ergibt sich durch Integration

$$\int_S M_{ki} n_i dS + \int_V D_t \mathcal{M}_k dV = 0. \quad (4.80)$$

Er ist eine Erhaltungsgröße für ein isotropes Material. Für anisotrope Materialien ist die Rotationssymmetrie gebrochen. Im Falle der Statik  $\mathcal{M}_k = 0$ , erhält man mit  $P_{ji}$  gegeben durch Gl. (4.66) das  $L_k$ -Integral

$$L_k := \int_S M_{ki} n_i dS. \quad (4.81)$$

Dieses verschwindet für die isotrope Gradiententheorie. Es ist die Verallgemeinerung vom  $L_k$ -Integral der klassischen Elastizität im Fall der Gradientenelastizität.

### 4.2.3 Addition von Lösungen

Diese Symmetrie ruht daher, daß die Euler-Lagrange Gln. linear sind und das Superponieren von einzelnen Lösungen auch eine Lösung ist. Das Vektorfeld  $v^5$  ist der Erzeuger dieser Divergenzsymmetrie. Die infinitesimalen Transformationen für diese Symmetrie lauten

$$x'_i = x_i, \quad (4.82)$$

$$t' = t, \quad (4.83)$$

$$u'_\alpha = u_\alpha + \varepsilon f_\alpha. \quad (4.84)$$

Dabei ist  $f_\alpha$  eine beliebige Lösung der Bewegungsgln. (4.12). Die infinitesimale Erzeuger der Addition von Lösungen sind durch

$$X_i = 0, \quad \tau = 0, \quad U_\alpha = f_\alpha. \quad (4.85)$$

gegeben. Für die Funktionen  $B_i$  und  $B_4$  gilt

$$B_i = -u_j [\tau_{ji}(\mathbf{f}) - D_k \tau_{jik}(\mathbf{f})] - u_{j,k} \tau_{jik}(\mathbf{f}), \quad (4.86)$$

$$B_4 = u_j p_j(\mathbf{f}). \quad (4.87)$$

Damit können die entsprechenden, erhaltenden Ströme

$$A_i = -f_j [\tau_{ji}(\mathbf{u}) - D_k \tau_{jik}(\mathbf{u})] - f_{j,k} \tau_{jik}(\mathbf{u}) + u_j [\tau_{ji}(\mathbf{f}) - D_k \tau_{jik}(\mathbf{f})] + u_{j,k} \tau_{jik}(\mathbf{f}), \quad (4.88)$$

$$A_4 = f_j p_j(\mathbf{u}) - u_j p_j(\mathbf{f}) \quad (4.89)$$

angegeben werden. Genauso wie in der klassischen Elastizität ist dies das Resultat des Betti-Theorems [32]. Es resultiert aus der Linearität des Systems (4.12). Für die statische Gradientenelastizität ist  $A_4$  gleich Null.

### 4.2.4 Skalierungsstrom

Im Gegensatz zur klassischen Elastizität ist die Skalierungsgruppe weder eine Variationssymmetrie noch eine Divergenzsymmetrie. Wie schon in der mikropolaren [76, 77] und mikromorphen Elastizität [79, 80] (siehe auch Kapitel 3), so kommen auch in der Gradientenelastizität innere Längen (4.13) vor, welche die Skalierungsinvarianz des Materialverhaltens brechen. Somit stellt die Skalierungssymmetrie in der Gradientenelastizität ebenfalls eine gebrochene Variationssymmetrie. Die Skalierungsgruppe wirkt in infinitesimaler Form auf die unabhängigen und abhängigen Variablen

$$x'_i = (1 + \varepsilon)x_i, \quad t' = (1 + \varepsilon)t, \quad u'_\alpha = (1 + \varepsilon d_u)u_\alpha, \quad (4.90)$$

wobei  $d_u$  die Skalierungsdimension des Vektorfelds  $\mathbf{u}$  angibt. Die Dimension des Vektorfeldes  $\mathbf{u}$  lautet in den "raumzeitlichen"  $d$ -Dimensionen:

$$d_u = -\frac{d-2}{2}, \quad d = n+1. \quad (4.91)$$



Für den dynamischen Fall ist  $d_u = -1$ , da  $n = 3$  ist. Im statischen Fall erhält man  $d_u = -1/2$ , da  $d = n = 3$ . Der infinitesimale Erzeuger ist durch

$$X_i = x_i, \quad \tau = t, \quad U_\alpha = d_u u_\alpha. \quad (4.92)$$

gegeben. Setzt man die Erzeuger (4.92) in die Formeln (4.47) und (4.48) ein, so erhält man die Skalierungsströme

$$\begin{aligned} A_i = x_i \mathcal{L} + (d_u u_\alpha - x_k u_{\alpha,k} - t \dot{u}_\alpha) \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} - D_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,ij}} \right] \\ + ((d_u - 1) u_{\alpha,j} - x_k u_{\alpha,k,j} - t \dot{u}_{\alpha,j}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,ij}}, \end{aligned} \quad (4.93)$$

$$A_4 = t \mathcal{L} + (d_u u_\alpha - x_i u_{\alpha,i} - t \dot{u}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha}, \quad (4.94)$$

welche, wenn umgeschrieben mit Hilfe des Impulsvektors und Spannungstensors (4.4), ihre endgültige Form

$$Y_i := -A_i = x_j P_{ji} - t S_i + d_u u_j [\tau_{ji} - D_l \tau_{jil}] + (d_u - 1) u_{j,k} \tau_{jik}, \quad (4.95)$$

$$\mathcal{Y} := A_4 = x_j \mathcal{P}_j - t \mathcal{H} + d_u u_j p_j, \quad (4.96)$$

annehmen. Die Skalierungsströme (4.95) und (4.96) stehen miteinander in folgender Relation

$$D_t \mathcal{Y} - D_i Y_i = u_{i,jk} \tau_{ijk}, \quad (4.97)$$

d.h. Gl. (4.97) ist kein Erhaltungssatz, sondern eine Bilanzgleichung. Der Term  $u_{i,jk} \tau_{ijk}$  bricht also die Skalierungssymmetrie. Aus dem Divergenztheorem bekommt man die Bilanzgleichung für die Skalierungstransformation:

$$\int_V D_t \mathcal{Y} dV - \int_S Y_i n_i dS = \int_V u_{i,jk} \tau_{ijk} dV. \quad (4.98)$$

Den vektorwertigen Skalierungsstrom für die Gradientenelastostatik bekommt man für  $T = 0$  aus den Gln. (4.93) und (4.95)

$$Y_i = x_j P_{ji} - \frac{n-2}{2} u_j (\tau_{ji} - D_l \tau_{jil}) - \frac{n}{2} u_{j,k} \tau_{jik}. \quad (4.99)$$

Die entsprechende Bilanzgleichung ist das  $M$ -Integral

$$M := \int_S Y_i n_i dS = - \int_V u_{i,jk} \tau_{ijk} dV, \quad (4.100)$$

welches die Verallgemeinerung der klassischen Elastizität für den Fall der Gradientenelastizität beschreibt. In der Gradientenelastostatik und Elastodynamik ist die Skalierungssymmetrie wegen dem Auftreten von Spannungen höherer Ordnung (Hyperspannungen, Momentenspannungen) gebrochen. Aus diesem Grund bekommt man im Vergleich zur Translationssymmetrie und Rotationssymmetrie für die Skalierungssymmetrie keinen Erhaltungssatz, sondern eine Bilanzgleichung.

### 4.3 Bilanzgleichungen

Bis jetzt haben wir uns mit den Erhaltungssätzen der homogenen Gradientenelastodynamik ohne äußeren Kraftquellen befasst. Wir möchten nun die Bilanzgleichungen untersuchen, welche für die nichthomogene Gradientenelastodynamik mit äußeren Kraftquellen ergeben. Dazu postuliert man für die Lagrangedichte die Form

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_i, u_\alpha, \dot{u}_\alpha, u_{\alpha,i}, u_{\alpha,ij}). \quad (4.101)$$

Aufgrund der Materialkraft (2.66) und der äußeren Last (2.47) ist der Translations, Rotations und Skalierungstrom gebrochen. Für die Translation nimmt die Bilanzgleichung die Form

$$D_t \mathcal{P}_k - D_i P_{ki} = f_k^{\text{inh}}, \quad (4.102)$$

an. Diese Bilanzgleichung ist gültig für die lineare, inhomogen anisotrope, Gradientenelastodynamik. Unter Benutzung der Euler-Lagrange Gln. (4.12) erhält man für die Rotation die Bilanzgleichung

$$\begin{aligned} D_t \mathcal{M}_k - D_i M_{ki} = & -\epsilon_{k j n} (u_{i,j} \tau_{in} + u_{j,i} \tau_{ni} + u_{i,jl} \tau_{inl} + u_{j,li} \tau_{nli} + u_{l,ij} \tau_{lin}) \\ & + \epsilon_{k j n} (x_j f_n^{\text{inh}} + u_j F_n). \end{aligned} \quad (4.103)$$

Liegt ein isotropes Material vor, dann verschwinden die Terme in der ersten Klammer auf der rechten Seite. Die andere Terme auf der rechten Seite sind die resultierende vektorwertige Momente, die durch die Inhomogenitäten und äußeren Volumenkräfte erzeugt werden. Die Bilanzgleichung für die Skalierung lautet

$$D_t \mathcal{Y} - D_i Y_i = u_{\alpha,jk} \tau_{\alpha jk} + x_i f_i^{\text{inh}} + \frac{d+2}{2} u_\alpha F_\alpha. \quad (4.104)$$

Zu dem Term  $u_{\alpha,jk} \tau_{\alpha jk}$  der Gl. (4.97) bekommt man in der Gl. (4.104) zwei weitere Quellterme auf der rechten Seite. Offensichtlich hängen sie mit der Arbeit der Inhomogenitätskraft  $f_i^{\text{inh}}$  und der äußeren Kraft  $F_\alpha$  zusammen.

# Kapitel 5

## Inkompatible Elastizitätstheorie

### 5.1 Defekte im Kristall

In einem idealen Kristallgitter befinden sich die Atome in einer regelmäßigen, periodischen Anordnung. Beim Abweichen von dieser Atomanordnung begegnet man im Aufbau eines realen Kristalls Gitterfehler (Defekte). Die Existenz dieser Defekte beeinflusst entscheidend die mechanischen Eigenschaften eines kristallinen Festkörpers wie z.B. seine Verformbarkeit, Zähigkeit und Festigkeit. Manchmal werden sogar bewußt Defekte in den Kristall eingebaut, um die erwünschten magnetischen und elektrischen Eigenschaften, wie sie z.B. in der Halbleitertechnologie benötigt werden, zu erzielen. Abhängig von der Dimension des Gitterfehlers, spricht man von null, ein, zwei und dreidimensionalen Defekten. Die Dimension wird durch den Raumbereich bestimmt, in dem eine *lokale Symmetriebrechung* des idealen Atomgitters stattfindet. Dadurch verändert sich die innere Gittergeometrie des Kristalls. Der Kristall an sich ist dann kein Euklidischer Raum mehr.

Ein Punktfehler liegt dann vor, wenn ein Atom an einem Gitterplatz fehlt und dadurch eine Leerstelle im Kristallgitter erzeugt. Eine andere Möglichkeit ist die Platznahme eines regulären Atoms im Gitter durch ein fremdes, Zwischengitteratom. Die räumliche Ausdehnung dieser Fehler hat die Dimension Null. Liniendefekte sind eindimensionaler Natur. Man unterscheidet zwei Arten, nämlich jene, die lokal die Translationssymmetrie des Kristalls und solche die lokal die Rotationssymmetrie des Kristalls unterbrechen. Zur ersten Art gehören die Kristallversetzungen. Es gibt zwei Sorten, die Schrauben und Stufenversetzung. Die zweite Art von Liniendefekten werden als Kristalldisklinationen bezeichnet. Die Schrauben und Stufenversetzungen werden auch nach dem Mathematiker V. Volterra als Volterra Distorsionen erster Art und die Disklinationen als Volterra Distorsionen zweiter Art [110] benannt. In den Abbildungen 5.1 und 5.2 reproduziert aus [122] sieht man die Operationen (elementare *distorsioni*) an einem Hohlzylinder, welche Volterra durchführte, um die elementare Eigenspannungszustände zu erklären. In den ersten drei Fällen, entstehen die Volterra Distorsionen dadurch, daß nach dem Aufschneiden des Zylinders die drei möglichen, relativen Verschiebungen der beiden Schnittufer ausgeführt werden. In dieser Position werden die beiden Schnittuffer wieder miteinanderverklebt und die Kräfte, welche sie zu dieser

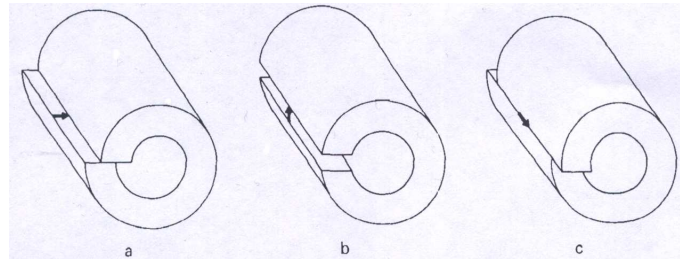


Abbildung 5.1: Die Volterra Distorsionen 1.Art.

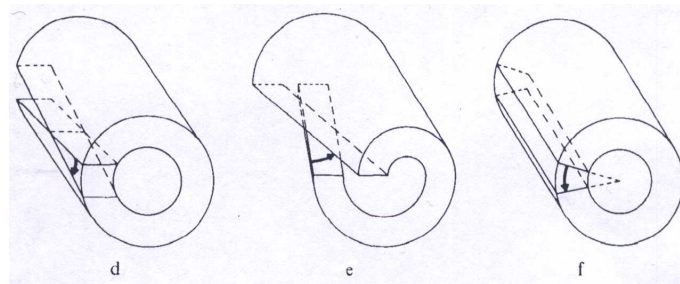


Abbildung 5.2: Die Volterra Distorsionen 2.Art.

Lage brachten entfernt. Die Pfeile geben entsprechend die Richtung der drei relativen Verschiebungsvektoren  $\mathbf{b}_x$ ,  $\mathbf{b}_y$  und  $\mathbf{b}_z$  an. Bei den ersten drei  $a, b, c$  Distorsionen ist nur eine relative Verschiebung und keine Drehung der Schnittufer zugelassen. Man bekommt eine Versetzung in einem elastischen Kontinuum, indem man bei den Volterra Zuständen den Innenradius des Hohlzylinders immer kleiner werden läßt. Die Verzerungen und Spannungen steigen auf der Seite des Innenzylinders mit abnehmendem Innenradius schnell an, bis es schließlich bei einem verschwindenden Innenradius zu einer Singularität auf der sogenannten Versetzungslinie kommt. Die Richtung dieser Linie im Kontinuum wird durch den Tangentialvektor  $\mathbf{t}$  beschrieben. Die beiden Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{t}$  legen die Versetzung in einem Kontinuum fest. Die Distorsionen  $a$  und  $b$  in der Abb. 5.1 dienen in einem realen Kristall zur Erzeugung einer Stufenversetzung. Der Fall  $c$  stellt das Konstruktionsprinzip für eine Schraubenversetzung dar.

Sind zwei Kristallstücke unterschiedlich orientiert, dann treffen sie sich entlang einer Ebene, die sogenannte Korngrenze. Diese stellt einen zweidimensionalen Fehler im Gitteraufbau dar. In einem Material, welches aus einer Kristallsorte A besteht und an bestimmten Stellen durch ein Kristall einer anderen Sorte B oder einem amorphen

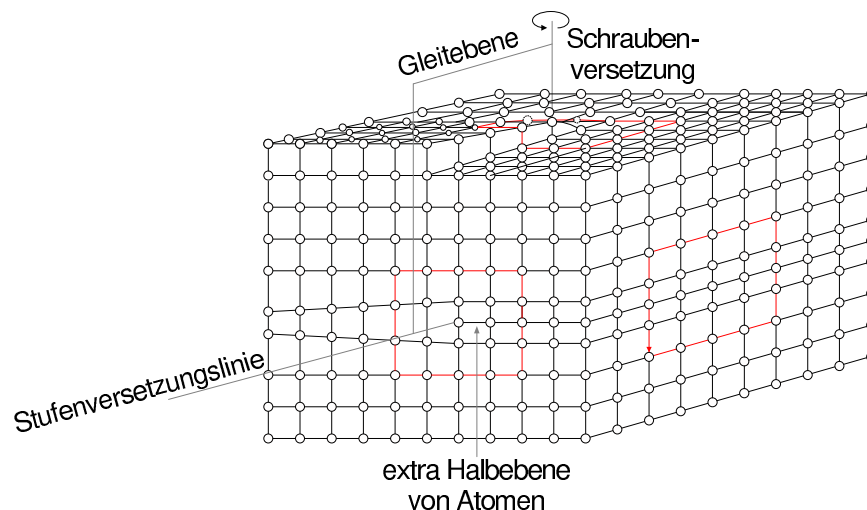


Abbildung 5.3: Eine Stufen und Schraubenversetzung im Kristallgitter.

Körper ersetzt wird, kommt ein dreidimensionaler Gitterfehler mit der Bezeichnung Ausscheidung vor.

In diesem Kapitel werden wir uns mit der Schrauben und Stufenversetzung befassen. Die Abb. 5.3 zeigt diese zwei Sorten von Versetzungen im Kristallgitter. Wir möchten zur Veranschaulichung der Erzeugung einer Stufenversetzung und Schraubenversetzung folgendes Gedankenexperiment führen. Man schneidet den Kristall entlang einer Fläche  $S$  bis c.a. zur Mitte auf. Beim Auseinanderhalten beider Schnittufer fügt man durch Gleiten entlang des Schnittes eine Halbebene ein. Schließlich klebt man den Kristall wieder zusammen und läßt ihn relaxieren. Somit hat man eine Stufenversetzung im Kristall erzeugt. Im Fall der Schraubenversetzung schiebt man keine Halbebene entlang des Schnittes ein, sondern führt um den Betrag eines Atomabstandes eine Scherung beider Schnittufer parallel zur Schnittkante durch. Bei der Stufenversetzung gelangen die ursprünglichen Schnittufer auseinander und bei der Schraubenversetzung gleiten sie aufeinander. Die Halbebene endet im Kristall entlang einer geraden Linie, die Versetzungslinie heißt. Im Fall eines endlichen Festkörpers endet sie entweder an der freien Oberfläche, oder sie krümmt sich zwangsläufig um eine geschlossene Linie innerhalb diesem zu bilden.

Wie läßt sich herausfinden ob in einem Kristall Versetzungslinien existieren? Um eine Versetzung aufzuspüren bietet sich die Möglichkeit mit Hilfe des Frankeschen Umlaufs [111] (siehe Abb. 5.4). Frank verglich zwei von der Gitterstruktur identische Kristalle. Der eine kam als ungestörter, idealer Kristall vor und der andere war durch die Anwesenheit einer Versetzung gestört. Ausgehend vom Punkt  $P'$  führt man im gestörten Kristall einen im Uhrzeigersinn geschlossenen Weg  $C'$  und bildet diesen anschließend in den idealen versetzungsfreien Kristall ab. Ausgehend vom Punkt  $P$  wird der innere Beobachter im idealen Kristall bei gleicher Anzahl von Schritten nicht in den Ausgangspunkt  $P$  ankommen, sondern in den um einen Atomabstand entfernt, zurückliegenden Endpunkt  $Q$ . Es existiert ein Schließungsfehler. Er wird durch den wahren *Burgers-*

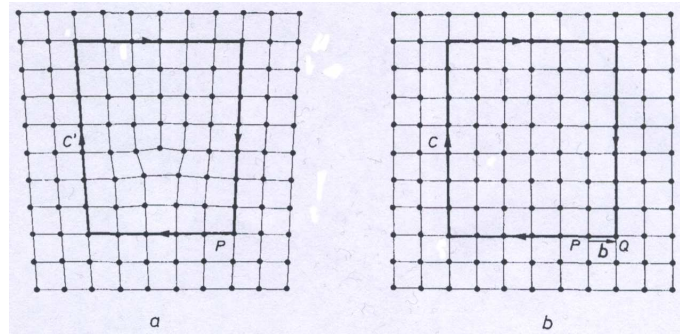


Abbildung 5.4: Der Frankescher Umlauf um eine Stufenversetzung.

vektor  $\mathbf{b}$ , welcher den Ausgangspunkt  $P$  mit dem Endpunkt  $Q$  verbindet, beschrieben. Frank gab somit eine, für einen aus einzelnen diskreten Atomen aufgebauten Kristall, angepasste Definition des Burgers Umlaufs und Burgersvektors, die früher von Burgers selbst für ein materielles Kontinuum angegeben worden war. Den Burgers Umlauf werden wir im nächsten Abschnitt benutzen, wo wir uns mit dem kontinuumstheoretischen Aspekt der Versetzungen befassen werden. Nimmt man sich wie in der Abb. 5.4 das einfache kubischprimitive Gitter vor Augen, dann wird in einem kleinen Gebiet um die Versetzungslinie die *Translationssymmetrie* des Kristalls zerstört sein. Außerhalb dieses Gebietes, wo der Defekt präsent ist, bleibt sie weiterhin erhalten. Dieser Schließungsfehler, der durch einen Translationsvektor dargestellt wird, ist wie erwähnt der Burgersvektor  $\mathbf{b}$ . Im obigen Gedankenexperiment entspräche also  $\mathbf{u} = \mathbf{b}$ . Im allgemeinen kann lokal aufgrund eines Gitterfehlers die Gesamtverschiebung  $\mathbf{u} = \mathbf{b} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$  stattfinden. Der erste Anteil ist die lokale Translation, die bei einer Schraube und Stufenversetzung (Volterra Distorsion 1.Art) existiert und es gilt  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ , da keine gegenseitige Drehung der Schnittufer stattfindet. Für die “Disklination” (Volterra Distorsion 2.Art) gibt es keine lokale Translation  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  aber dafür eine lokale Drehung  $\boldsymbol{\Omega} \neq \mathbf{0}$ , d.h. der zweite Anteil von  $\mathbf{u}$  ist dann wichtig. Die Abb. 5.2 zeigt die möglichen lokalen Drehungen die es bei einem Hohlzylinder geben kann. Die Volterra Distorsion 2.Art kann in bestimmten Fällen aus einer speziellen Anordnung von Versetzungen erklärt werden. Durch das Anordnen von Stufenversetzungen gleichen Vorzeichens untereinander kann eine Versetzungswand aufgebaut werden. Diese stellt dann eine singuläre Fläche dar.

Je nach Größenordnung der lokalen Störung (z.b. Anzahl der eingeschobenen Halbebenen für die Stufenversetzung!) kann der Burgersvektor  $\mathbf{u} = n\mathbf{R}$  ein ganzes vielfaches des Bravaisgittervektors  $\mathbf{R}$  betragen. Man spricht dann auch von vollständigen Versetzungen. Die Korngrenzen werden durch unvollständige Versetzungen begrenzt. In diesem Fall ist  $n$  halbzahlig. Der Burgersvektor  $\mathbf{b}$  und der, an der Versetzungslinie tangentielle Linienvektor  $\mathbf{t}$  spannen die Gleitebene auf. Auf dieser spielt sich die Bewegung der Versetzung ab. Bei Stufenversetzungen kann es außer einer Gleitbewegung auch eine Kletterbewegung stattfinden. Die Versetzungen erzeugen um ihre Linie eine elastische Deformation und rufen somit ein Eigenspannungsfeld im Material hervor,

ohne daß das Wirken einer Kraft von außerhalb notwendig wäre. Wird aber zusätzlich von außen eine Scherspannung an den Kristall angelegt, dann wird die elastische Deformation um den Versetzungskern zunehmen, bis bei Überschreitung einer bestimmten Grenzspannung, ein Wandern der Versetzungen entlang der Gleitebenen einzusetzen beginnt. Dieser Vorgang wird sich solange fortsetzen, bis diese schließlich auf bestimmte Hindernisse wie Korngrenzen steckenbleiben oder aber durch ein freies Fortbewegen an die Oberfläche des Kristalls gelangen. Bei diesem Bewegungsmechanismus werden die Teile des Kristalls gegenseitig verschoben bis es unter einer weiteren Beanspruchung zu einem Bruch kommt.

## 5.2 Kinematik

In der klassischen statischen Elastizitätstheorie wird eine kompatible Deformation mit Hilfe der folgenden Gleichungen behandelt

$$\tau_{ij,j} = F_i, \quad (5.1)$$

$$\epsilon_{ikm}\epsilon_{jln}\epsilon_{mn,kl} = 0, \quad (5.2)$$

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}e_{kl}. \quad (5.3)$$

Die Gleichgewichtsbilanzgleichung (5.1) zusammen mit der St. Venantschen Verträglichkeitsbedingung (5.2) und dem Hookeschen Gesetz (5.3) der Elastizität für einen beliebigen, linearen, elastischen Körper bilden die Gleichungen, aus denen man die Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen in jedem materiellen Punkt ausrechnen kann, wenn die äußeren Kräfte  $F_i$  bekannt sind. Im Kapitel 2 hat man die elastische Distorsion additiv in ihren symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegt (2.16). Die elastische Verzerrung (2.14) ist der symmetrische Anteil des Verschiebungsfeldes und man schreibt sie auch in symbolischer Form als Deformator eines Vektorfeldes

$$\mathbf{e} = \text{def } \mathbf{u}. \quad (5.4)$$

Zuerst wird mit Hilfe der Gradienten-Operation aus dem Verschiebungsfeld ein Tensorfeld erzeugt und anschließend symmetrisiert. Liegt eine *inkompatible Deformation* vor, dann ist die St. Venantschen Verträglichkeitsbedingung (5.2) verletzt. Wenn in einem Medium Versetzungen in der Gitterstruktur existieren, dann werden zusätzliche kinematische Größen eingeführt. Bei kleinen Deformationen kann die totale Verzerrung additiv in zwei Anteile, einen elastischen und einen plastischen zerlegt werden

$$\mathbf{e}_{ij}^T = e_{ij} + e_{ij}^P. \quad (5.5)$$

Die beiden Anteile sind inkompatibel, nur die totale Verzerrung kann als Deformator des Verschiebungsfeldes angegeben werden

$$\mathbf{e}^T = \text{def } \mathbf{u}. \quad (5.6)$$

Das Maß der Inkompatibilität kann man mit Hilfe der  $\text{ink}$  Operation bekommen. Sie stellt eine von links und rechts ausgeführten Rotation auf einen Tensor 2. Stufe dar [112]:

$$\text{ink} := \nabla \times () \times \nabla. \quad (5.7)$$

Für die totale Verzerrung, die jetzt die Rolle der elastischen Verzerung des kompatiblen Falls übernimmt und den Deformator des Verschiebungsfeldes darstellt, ist dieses Maß gleich Null aufgrund der bekannten Identität aus der Vektoranalysis

$$\text{rot grad} \equiv 0, \quad (5.8)$$

die in unserem Fall eigentlich

$$\text{ink def} \equiv 0 \quad (5.9)$$

heißt. Die  $\text{ink}$  Operation kann auf die Gleichung (5.5) angewandt werden und dies liefert

$$0 = \text{inke}^T = \text{inke} + \text{inke}^P. \quad (5.10)$$

Das Maß der inkompatiblen elastischen und plastischen Verzerrung wollen wir mit  $\boldsymbol{\eta}$  bezeichnen. Dieses ist definiert als [112]

$$\boldsymbol{\eta} := \text{inke} = -\text{inke}^P. \quad (5.11)$$

Wegen der Definition von  $\boldsymbol{\eta}$  und einer anderen Identität aus der Vektoranalysis

$$\text{div rot} \equiv 0, \quad (5.12)$$

gilt entsprechend

$$\text{div ink} \equiv 0. \quad (5.13)$$

Alles was bisher über die Zerlegung der totalen Verzerrung  $e_{ij}^T$  besprochen wurde, gilt auch für das totale Rotationsfeld  $\omega_{ij}^T = \omega_{ij} + \omega_{ij}^P$ , d.h. für den antisymmetrischen Anteil der Distorsion (2.17) und somit wegen der allgemein gültigen Zerlegung

$$\beta_{ij}^T = e_{ij}^T + \omega_{ij}^T, \quad (5.14)$$

auch für die totale Distorsion

$$\beta_{ij}^T = \beta_{ij} + \beta_{ij}^P, \quad (5.15)$$

die als Gradient des Verschiebungsfeldes definiert ist

$$\beta_{ij}^T = u_{i,j}. \quad (5.16)$$



Man wendet die Operation der Rotation auf Gl. (5.15) von rechts an und erhält

$$0 = \text{rot} \boldsymbol{\beta}^T = \text{rot} \boldsymbol{\beta} + \text{rot} \boldsymbol{\beta}^P. \quad (5.17)$$

Diesmal wird als Größe für die inkompatible Deformation des Materials der Tensor der *Versetzungsdichte*  $\boldsymbol{\alpha}$  eingeführt [112]

$$\boldsymbol{\alpha} := -\text{rot} \boldsymbol{\beta}^P = \text{rot} \boldsymbol{\beta}, \quad \alpha_{ij} := \epsilon_{jkl} \beta_{il,k}, \quad (5.18)$$

welcher eine Inkompatibilitätsbedingung erster Ordnung in differentieller Form darstellt. Aus dieser Definition ist abzulesen, daß in einem endlichen Material wo nur Versetzungen als Defekte existieren, die Versetzungslinien geschlossen sein müssen und im Inneren des Mediums nicht aufhören dürfen. Der mathematische Ausdruck für diese Tatsache lautet

$$\alpha_{ij,j} = 0. \quad (5.19)$$

Die Gl. (5.19) wird als *Bianchi Identität* bezeichnet. Aus der Gl. (5.18) zusammen mit der Gl. (2.16) läßt sich folgende Beziehung herleiten

$$K_{ij} = K_{ij}^\omega + K_{ij}^e. \quad (5.20)$$

Dabei hat man folgende Tensoren [112]

$$K_{ij} = \alpha_{ji} - \frac{1}{2} \alpha_{kk} \delta_{ij}, \quad K_{ij}^\omega = \omega_{i,j}, \quad K_{ij}^e = \epsilon_{ikl} e_{jl,k}, \quad (5.21)$$

eingeführt (siehe Anhang, Gl. (A.5) und Gl. (A.6)).

Wir haben bislang zwei Möglichkeiten gesehen die Inkompatibilitätsbedingung in differentieller Form auszudrücken, nämlich die Gln. (5.11) und (5.18). Zwischen beiden kann ein Zusammenhang hergestellt werden. Wendet man den *rot*-Operator von links auf die Gl. (5.18) und symmetrisiert anschließend, dann bekommt man als Ergebnis den Inkompatibilitätstensor  $\boldsymbol{\eta}$ . Aus Gleichung (5.18) kann mit Hilfe des Stokeschen Satzes die Inkompatibilitätsbedingung in folgender integraler Form

$$\int_S \text{rot} \boldsymbol{\beta} d\mathbf{S} = \oint_C \boldsymbol{\beta} d\mathbf{r} = \mathbf{b}. \quad (5.22)$$

geschrieben werden. Wird das Verschiebungsfeld entlang eines geschlossenen Umlaufs  $C$  um die Versetzungslinie integriert, so erfährt dieses einen Sprung um den Betrag  $|\mathbf{b}|$  in eine Richtung senkrecht zur Versetzungslinie (Stufenversetzung) oder parallel dazu (Schraubenversetzung). Dieser hängt nicht von der Größe und Form des geschlossenen Umlaufs  $C$  ab, sondern nur von der Anzahl der Versetzungen, die er umschließt. Der Burgersvektor  $\mathbf{b}$  und die durch  $\mathbf{t}$  angegebene Versetzungslinienrichtung ist die nötige Information, um eine Versetzung zu definieren.

Stellt man sich eine kontinuierliche Verteilung von Versetzungen in einem Kontinuum vor, dann kann  $d\mathbf{b}$  als der resultierende Burgersvektor infinitesimaler Stärke aller

durch das Flächenelement  $d\mathbf{S}$  verlaufende Versetzungslinien interpretiert werden. Lokal gilt also der Zusammenhang

$$db_i = \alpha_{ij} dS_j, \quad (5.23)$$

aus welchem durch Integration

$$b_i = \int_S \alpha_{ij} dS_j \quad (5.24)$$

sich der Burgersvektor ergibt. Somit bekommt man auch ein Verständnis für  $\alpha_{ij}$  als die Dichte der Versetzungslinien. Der erste Index gibt die Richtung des Burgersvektors  $b_i$  an, während der zweite Index die mittlere Richtung aller, das Flächenelement  $d\mathbf{S}$  durchstoßende Versetzungen kennzeichnet. Die diagonale Komponenten von  $\alpha_{ij}$  mit  $\mathbf{b} \parallel \mathbf{t}$  beschreiben Schraubenversetzungen und die nichtdiagonale Komponenten mit  $\mathbf{b} \perp \mathbf{t}$  sind für die Stufenversetzungen relevant.

Betrachtet man eine inkompatible Deformation und werden die äußeren Kräfte in der Gleichgewichtbilanz (5.1) zu Null  $F_i = 0$  gesetzt, dann spricht man von einem Eigenspannungsproblem. Setzt man die elastische Verzerrung

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - e_{ij}^P, \quad e_{ij}^P = \frac{1}{2}(\beta_{ij}^P + \beta_{ji}^P) \quad (5.25)$$

ins Materialgesetz (5.3) ein und benutzt dieses anschließend für die Gleichgewichtbilanz (5.1), dann bekommt man drei Gleichungen für das Verschiebungsfeld  $u_i$

$$C_{ijkl} u_{k,lj} = C_{ijkl} \frac{1}{2}(\beta_{kl,j}^P + \beta_{lk,j}^P), \quad (5.26)$$

wenn die plastische Distorsion  $\beta_{ij}^P$  als gegeben vorausgesetzt wird. Für ein linear isotropes Kontinuum mit dem Hookeschen Tensor (2.31) ergeben sich die inhomogene Navier Gln.

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu) u_{j,ji} = \mu(\beta_{ij,j}^P + \beta_{ji,i}^P) + \lambda \beta_{kk,i}^P. \quad (5.27)$$

Diese kann man mit der Methode der Fourier Transformation lösen. Das ist die Vorgehensweise für die Lösung der Gln. (5.1)–(5.3) in der klassischen Elastizitätstheorie. Die ausgerechneten Spannungen werden singulär auf der Versetzungslinie, und sind nur außerhalb eines bestimmten Gebietes, welches den Einfluß des Versetzungskernes auf die elastische Deformation beschreibt, gültig. Sie liefern also ein richtiges Fernfeld. Es stellt sich nun die Frage, nach einer Theorie, die physikalisch sinnvolle Resultate vorhersagt, d.h. einerseits die klassische Fernfeldlösung reproduziert und andererseits eine richtige reguläre Lösung innerhalb des Kerngebietes liefert. Weiterhin weiß man z.B., daß eine Stufenversetzung für die Biegung des Kristallgitters verantwortlich sei, was darauf hinweist, daß auch Momentenspannungen präsent sein sollten. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß es diese Theorie tatsächlich gibt und sie mit dem Namen *Eichfeldtheorie* der Versetzungen verbunden ist.

# Kapitel 6

## Eichfeldtheorie der Versetzungen

Bei einer kompatiblen Deformation eines homogenen isotropen Festkörpers, hängt die elastisch gespeicherte Energie nur von der Distorsion ab, die dieser erleidet. Aus der Definition von  $\beta_{ij} = u_{i,j}$  als Gradient des Verschiebungsfeldes ergibt sich folgende Symmetrie

$$W(\beta') = W(\beta), \quad \beta'_{ij} = \beta_{ij}, \quad u'_i = u_i - \tilde{f}_i, \quad (6.1)$$

mit  $\tilde{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^3$  einen überall im Material konstanten Translationsvektor. Erfährt jeder materieller Punkt die gleiche, *globale Translation*, so bleibt seine elastisch gespeicherte Energie erhalten. Wirkt durchgehend im Material in jedem materiellen Punkt eine konstante *globale Rotation*  $u'_i = R_{ij} u_j$ , mit  $R_{ji} = R_{ij}^{-1} = \text{const.}$ , so verändert sich die elastisch gespeicherte Energie im Kontinuum ebenfalls nicht. Die aus einer konstanten Translation und Rotation ergebende Euklidische Gruppe beschreibt somit die Isometriegruppe der Elastizität, da bei der Verschiebung

$$u'_i = R_{ij} u_j - \tilde{f}_i, \quad (6.2)$$

die Abstände zwischen den materiellen Punkten des Kontinuums unverändert bleiben. Der Erhaltungssatz dieser *inneren Symmetrie* sind die Euler-Lagrange Gln. der kompatiblen Elastizität.

Läßt man eine Translation zu, die in jedem materiellen Punkt einen anderen Betrag haben kann, also eine *lokale Translation*  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ , dann geht die Invarianz der elastischen Distorsion und somit der potentiellen Energie verloren

$$W(\beta') \neq W(\beta), \quad \beta'_{ij} = \beta_{ij} - \tilde{f}_{i,j}, \quad u'_i(x_k) = u_i(x_k) - \tilde{f}_i(x_k). \quad (6.3)$$

Offenbar ist die Transformation (6.3) keine innere Symmetrie mehr für den elastischen Körper. Die Symmetrie kann wieder hergestellt werden, indem man ein neues Feld  $\phi$  einführt, um den Störungsterm  $\tilde{f}_{i,j}$  aufzuheben. Dabei hat  $\phi$  sich folgendermaßen

$$\phi'_{ij} = \phi_{ij} + \tilde{f}_{i,j}, \quad (6.4)$$

zu transformieren. Das Feld  $\phi$  heißt *Eichpotential* und transformiert sich nach Gl. (6.4) inhomogen. Die eichinvariante Größe kann durch die *minimale Kopplung*

$$\beta'_{ij} = \beta_{ij} = \nabla_j u_i := u_{i,j} + \phi_{ij}, \quad (6.5)$$

erhalten werden. Dabei ist  $\nabla_j$  die kovariante Ableitung bezüglich der Translationsgruppe. Setzt man das Eichpotential  $\phi$  gleich mit der negativen plastischen Distorsion

$$\phi_{ij} \equiv -\beta_{ij}^P \quad (6.6)$$

ein, so ergibt sich die Invarianz der elastischen Distorsion eines Materials mit Versetzungen

$$\beta'_{ij} = \beta_{ij} = u_{i,j} - \beta_{ij}^P. \quad (6.7)$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit wollen wir für das Eichpotential weiterhin die Bezeichnung  $\phi$  benutzen. Man behält im Hinterkopf, daß es sich dabei um die negative plastische Distorsion handelt. Die inkompatible Distorsion kann als *minimale Kopplung* (6.7) der kompatiblen Distorsion  $\beta_{ij} = u_{i,j}$  durch eine Eichtheorie der Translationsgruppe verstanden werden. Durch die Einführung dieses Eichpotentials beschreibt jetzt  $W$  die potentielle Energie eines inkompatiblen Materials. Die Forderung einer Eichinvarianz bezüglich der Translationsgruppe führt also auf Wechselwirkungsterme der Versetzung mit dem Medium. Um die Eichfeldtheorie zu vervollständigen, führt man zusätzlich zur inkompatiblen Distorsion die *Eichfeldstärke* der Translation

$$T_{ijk} := \phi_{ik,j} - \phi_{ij,k}, \quad T_{ijk} := \beta_{ik,j} - \beta_{ij,k}, \quad (6.8)$$

ein, welche differentialgeometrisch die *Torsion* beschreibt. Die Torsion wurde von Elie Cartan [46] im Jahr 1922 in die Differentialgeometrie als der antisymmetrische Anteil einer affinen Konnektion im linearen Raum eingeführt (siehe Anhang, Gl. (A.16)). Kondo [41, 42], Bilby, Bullough und Smith [43, 44] und Kröner [45] erkannten unabhängig voneinander, daß es einen Zusammenhang zwischen einer nicht-Euklidischen Geometrie und den geometrischen Problemen der Plastizität gibt. Es stellte sich heraus, daß die Torsion das passende mathematische Werkzeug zur Beschreibung einer Versetzung im Kristall darstellt. Anwendungen dieser differentialgeometrischen Größe finden sich auch in einer erweiterten allgemeinen Relativitätstheorie, die außer der Massenverteilung noch einen mit dieser Größe verbundenen Spin berücksichtigt [115].

Die beiden Indizes  $j, k$  der Torsion  $T_{ijk}$  geben die Ebene an, in welcher der Umlauf um einer Versetzung stattfindet. Der Index  $i$  gibt dann die Translationsverschiebung (Burgers Vektor), die man bei der Umkreisung der Versetzung erleidet. Liegt die Versetzungslinie einer Schrauben und Stufenversetzung entlang der  $z$ -Achse, so wird bei der Umkreisung der Versetzungslinie in der  $xy$ -Ebene im ersten Fall eine  $T_{zxy}$  Komponente geben. Im zweiten Fall kann es zu einer  $T_{xxy}$  oder  $T_{yyx}$  Komponente kommen, je nachdem ob die Translationsverschiebung (Burgers-Vektor) in die  $x$  oder  $y$ -Richtung jeweils stattfindet. Die Torsion ist die zuständige kinematische Größe für das statische

Versetzungsfeld. Sie ist in den letzten zwei Indizes antisymmetrisch und steht mit dem Versetzungsdichtetensor  $\alpha_{ij}$  folgendermaßen

$$T_{ikl} = \epsilon_{klj} \alpha_{ij}, \quad \alpha_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{jkl} T_{ikl} \quad (6.9)$$

im Zusammenhang (siehe Anhang, Gl. (A.18)). Die kanonisch konjugierte Größe zur Torsion  $T_{ijk}$  ist die Hyperspannung  $H_{ijk}$ . Diese beinhaltet auch Momentenspannungen  $H_{[ij]k}$ , deren Quelle der antisymmetrische Anteil der Spannungen  $\sigma_{[ij]}$  ist. Da wir zu einer dynamischen Eichtheorie der Versetzungen gelangen wollen, erweitern wir das Konzept der lokalen räumlichen Translation. Wir lassen also zu, daß  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$  noch von der Zeit abhängt. Für die kinetische Energie bekommt man ebenfalls einen Symmetriebruch

$$T(v'_i) \neq T(v_i), \quad v'_i = v_i - \dot{f}_i, \quad v_i = \dot{u}_i. \quad (6.10)$$

Diesmal führen wir zur Restauration der Symmetrie ein dynamisches Eichpotential  $\varphi$  ein, das sich folgendermaßen transformiert

$$\varphi'_i = \varphi_i + \dot{f}_i. \quad (6.11)$$

Die neue eichinvariante Größe bekommt folgende Gestalt

$$v'_i = v_i = \nabla_t u_i := \dot{u}_i + \varphi_i. \quad (6.12)$$

Genau wie die elastische Distorsion (6.6), stellt das elastische Geschwindigkeitsfeld

$$v'_i = v_i = \dot{u}_i - v_i^P \quad (6.13)$$

eine Zustandsgröße dar. Dabei wurde das dynamische Eichpotential

$$\varphi_i \equiv -v_i^P \quad (6.14)$$

mit dem negativen plastischen Geschwindigkeitsanteil identifiziert. Wir werden im Weiteren für das dynamische Eichpotential die Bezeichnung  $\varphi$  behalten. Aus den Eichpotentialen  $\phi, \varphi$  ergibt sich eine zweite Feldstärke, die Versetzungsstromdichte

$$I_{ij} := -\varphi_{i,j} + \dot{\phi}_{ij}, \quad (6.15)$$

die auch in den eichinvarianten Größen  $\beta_{ij}, v_i$

$$I_{ij} := -v_{i,j} + \dot{\beta}_{ij}, \quad (6.16)$$

formuliert werden kann [52]. Diese ist die zweite kinematische Größe, verantwortlich für die Dynamik des Versetzungsfeldes. Im Falle der dynamischen Versetzungstheorie bekommt man zusätzlich zu (5.19) noch eine weitere Bianchi Identität

$$\dot{T}_{ijk} + 2I_{i[j,k]} = 0. \quad (6.17)$$

Mit Gl. (6.9) beschreibt diese die lokale Erhaltungsgleichung für den Versetzungsdichtentensor. Aus einer Flächenintegration bekommt man die Erhaltung des Burgers Vektors als globale Erhaltungsgröße. Die lokale Translation von  $u_i$  zusammen mit den Gleichungen (6.4), (6.11) für das Transformationsverhalten von  $(\phi, \varphi)$  liefern also die vier folgenden eichinvarianten kinematischen Größen

$$I'_{ij} = I_{ij}, \quad T'_{ijk} = T_{ijk}, \quad \beta'_{ij} = \beta_{ij}, \quad v'_i = v_i. \quad (6.18)$$

Aus den Beziehungen (6.5) und (6.12) ergibt sich die Lagrangedichte für das inkompatible elastische Material

$$\mathcal{L}_{\text{ep}} = \frac{1}{2} p_i v_i - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \beta_{ij}. \quad (6.19)$$

Diese beschreibt die kinetische und potentielle Energie eines elastischen Kontinuums, welches mit den vorhandenen Versetzungen wechselwirken kann. Die Versetzungskernenergie ist durch folgenden Ausdruck

$$\mathcal{L}_{\text{ve}} = \frac{1}{2} D_{ij} I_{ij} - \frac{1}{4} H_{ijk} T_{ijk}, \quad (6.20)$$

gegeben. Die gesamte Lagrangedichte für das Variationsprinzip lautet

$$\mathcal{L}(\beta, \mathbf{T}, \mathbf{v}, \mathbf{I}) = \mathcal{L}_{\text{ep}} + \mathcal{L}_{\text{ve}}. \quad (6.21)$$

Mit dieser Lagrangedichte und der Bedingung, daß das Wirkungsintegral bezüglich der Variation nach den Feldvariablen  $(u_i, \varphi_i, \phi_{ij})$  minimal wird, ergeben sich folgende Euler-Lagrange Gln.

$$E_i^u(\mathcal{L}) = D_t p_i - D_j \sigma_{ij} = 0, \quad (6.22)$$

$$E_i^\varphi(\mathcal{L}) = D_j D_{ij} + p_i = 0, \quad (6.23)$$

$$E_{ij}^\phi(\mathcal{L}) = D_t D_{ij} + D_k H_{ijk} + \sigma_{ij} = 0. \quad (6.24)$$

Dabei sind  $D_t$  und  $D_i$  die totalen Ableitungen

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + \dot{\varphi}_\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi_\alpha} + \dot{\phi}_\alpha \frac{\partial}{\partial \phi_\alpha} + \dots \quad (6.25)$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_{\alpha,i} \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + u_{\alpha,ij} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha,j}} + \varphi_{\alpha,ij} \frac{\partial}{\partial \varphi_{\alpha,j}} + \phi_{\alpha,ij} \frac{\partial}{\partial \phi_{\alpha,j}} + \dots \quad (6.26)$$

Die kanonisch konjugierten Größen definiert man aus der Lagrangedichte folgendermaßen

$$D_{ij} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_{ij}}, \quad H_{ijk} := -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T_{ijk}}, \quad \sigma_{ij} := -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_{ij}}, \quad p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}. \quad (6.27)$$

Das Gleichungssystem (6.22)–(6.24) hat eine analoge Struktur zu den Maxwell Gleichungen der Elektrodynamik. Für einen mehr formalen Zugang als Einführung in die

Eichfeldtheorie der Versetzungen siehe auch [117]. Die Gln. (6.22)–(6.24) beschreiben das dynamische Verhalten der Versetzungen in einem Material, dessen materielle Punkte unter Spannungen stehen. Einerseits treiben die Spannungen die Versetzungen und andererseits erzeugt deren eigene Bewegung einen Fluß der materiellen Punkte in die entgegengesetzte Richtung. Es besteht eine dynamische Wechselwirkung zwischen den Versetzungen und dem Material in dem sie sich befinden. Die Gl. (6.22) stellt die Impulsbilanz dar. Sie ist auch die Integrabilitätsbedingung für die Bilanzgleichungen (6.23), (6.24) der Versetzungen. Wendet man nämlich den Differentialoperator  $D_t$  auf Gl. (6.23) und  $D_j$  auf Gl. (6.24) und subtrahiert anschließend das Ergebnis der letzten von der ersten Gleichung, ergibt sich die Impulsbilanzgleichung als Integrabilitätsbedingung. Diese Gleichung übernimmt die Rolle der Ladungserhaltung in der elektromagnetischen Feldtheorie. Wir möchten in dieser Arbeit das allgemeinste lineare Materialgesetz für ein homogenes, isotropes Kontinuum wählen. Dies liefert folgende Ausdrücke für den Impuls, die Spannungen, die Hyperspannungen und den Impuls des Versetzungsstromes

$$p_i = \rho v_i, \quad (6.28)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \beta_{kk} + \mu (\beta_{ij} + \beta_{ji}) + \gamma (\beta_{ij} - \beta_{ji}), \quad (6.29)$$

$$H_{ijk} = c_1 T_{ijk} + c_2 (T_{jki} + T_{kij}) + c_3 (\delta_{ij} T_{lk} + \delta_{ik} T_{jl}), \quad (6.30)$$

$$D_{ij} = d_1 \delta_{ij} I_{kk} + d_2 (I_{ij} + I_{ji}) + d_3 (I_{ij} - I_{ji}). \quad (6.31)$$

Man achte darauf, daß die Spannungen in diesem Fall asymmetrischer Natur sind. Im Vergleich zum symmetrischen Cauchyschen Spannungstensor (2.30) der konventionellen Elastizitätstheorie leistet in der Materialgleichung (6.29) durch das Auftreten des Drehmoduls  $\gamma$  die elastischen Rotation  $\omega_{ij} = \beta_{[ij]}$  auch einen Beitrag. Die Spannungen dienen im Kontinuum als Quelle für das Auftreten von Hyperspannungen. Dies wird in der Gl. (6.24) ersichtlich. Ebenso besagt Gl. (6.23), daß der Impuls der materiellen Punkte als Antrieb für den Impuls der Versetzungen verstanden werden kann. Wählt man die Relationen (6.28)–(6.31) als Materialgleichungen, dann sieht man sofort eine Verallgemeinerung der bisher bekannten Beziehungen für die Cauchyschen und Momentenspannungen. Durch das Zufügen der zusätzlichen Konstanten  $\gamma$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  für den statischen und  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  für den dynamischen Fall, gelangt man also zu der Eichtheorie der Versetzungen für ein homogenes, isotropes Medium. Es wird gezeigt, wie die Materialgleichung (6.30) für die Hyperspannungen zustande kommt. Dazu wählt man

$$H_{ijk} = D_{ijklmn} T_{lmn}. \quad (6.32)$$

Der Materialtensor sechster Stufe  $D_{ijklmn}$  hat für ein isotropes Material folgende Gestalt

$$\begin{aligned} D_{ijklmn} = & A_1 \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + A_2 \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + A_3 \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn} + A_4 \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl} \\ & + A_5 \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + A_6 \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + A_7 \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + A_8 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} \\ & + A_9 \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + A_{10} \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + A_{11} \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + A_{12} \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm} \\ & + A_{13} \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + A_{14} \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} + A_{15} \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} \end{aligned} \quad (6.33)$$

mit den zusätzlichen Eigenschaften

$$D_{ijklmn} = D_{lmnij k} = -D_{ikjlmn} = -D_{ijklnm} = D_{imnljk}. \quad (6.34)$$

Somit ergibt sich für den Tensor  $H_{ijk}$  der Hyperspannungen

$$\begin{aligned} H_{ijk} = D_{ijklmn} T_{lmn} = & A_1 T_{ijk} + A_2 T_{ikj} + A_3 \delta_{jk} T_{imn} + A_4 T_{kji} \\ & + A_5 T_{jki} + A_6 \delta_{jk} T_{lli} + A_7 \delta_{ij} T_{kmm} + A_8 \delta_{ij} T_{llk} \\ & + A_9 \delta_{ij} T_{lkl} + A_{10} \delta_{ik} T_{jmm} + A_{11} \delta_{ik} T_{ljl} + A_{12} \delta_{ik} T_{llj} \\ & + A_{13} T_{kij} + A_{14} \delta_{jk} T_{lil} + A_{15} T_{jik}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Aus der Antisymmetrie in den Indizes  $j, k$  sieht man, daß  $A_3 = A_6 = A_{14} = 0$ , sein muß, da  $\delta_{jk} = \delta_{kj}$  gilt. Dazu kommen noch die Beziehungen  $A_2 = -A_1$ ,  $A_4 = -A_5$ ,  $A_{10} = -A_7$ ,  $A_{11} = -A_9$ ,  $A_{12} = -A_8$  und  $A_{15} = -A_{13}$ . Mit dieser Information für die Materialkonstanten bekommt man die Materialgleichung (6.30) wenn noch

$$A_1 = c_1, \quad A_5 + A_{13} = c_2, \quad A_8 - A_9 = c_3 \quad (6.36)$$

für die übrig gebliebenen Konstanten gesetzt wird.

Die Materialgesetze für die Spannungen (6.29), Hyperspannungen (6.30) und für den Impuls des Versetzungsstromes (6.31) stellen keine irreduzible Zerlegung dar. Die irreduzible Zerlegung des Cauchyschen Spannungstensors (2.34) verändert sich für den asymmetrischen Spannungstensor eines isotropen inkompatiblen Mediums (6.29) folgendermaßen

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ij}^3 \\ &= 2\mu(\beta_{(ij)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\beta_{kk}) + 2\gamma\beta_{[ij]} + (3\lambda + 2\mu)\frac{1}{3}\delta_{ij}\beta_{kk}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Anstelle des Verzerrungstensors  $e_{ij}$  geht jetzt als kinematische Größe die gesamte Distorsion  $\beta_{ij}$  in die Materialgleichung (6.37) ein. Der asymmetrische Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  setzt sich aus drei unabhängigen Distorsionsanteilen

$$\beta_{ij}^1 = \beta_{(ij)} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\beta_{kk} \quad \text{Scherung,} \quad (6.38)$$

$$\beta_{ij}^2 = \beta_{[ij]} \quad \text{Rotation,} \quad (6.39)$$

$$\beta_{ij}^3 = \frac{1}{3}\delta_{ij}\beta_{kk} \quad \text{Dilatation,} \quad (6.40)$$

zusammen. Der erste Term  $\sigma_{ij}^1$  ist symmetrisch und spurlos und beschreibt die Spannungen aufgrund einer reinen Deformation ohne Volumenänderung. Der zweite Term  $\sigma_{ij}^2$  fehlt in dem Cauchyschen Spannungstensor (2.34) und ist für die Asymmetrie des Spannungstensors  $\sigma_{ij}$  verantwortlich. Er ist antisymmetrisch und gibt die Erzeugung von Spannungen aufgrund einer lokalen relativen elastischen Drehung des materiellen Punktes. Der dritte Term  $\sigma_{ij}^3$  in der irreduziblen Zerlegung (6.37) des Spannungstensors gibt die Reaktion des Kontinuums auf eine Volumendilatation. Mit der Zerlegung (6.37)



bekommt man aus der positiven Definitheit  $W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \beta_{ij} \geq 0$  der elastischen Verzerungsenergie (siehe auch [52])

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \quad \mu \geq 0, \quad \gamma \geq 0. \quad (6.41)$$

Die erste Ungleichung von (6.41) kann auch mit Hilfe der Poissonschen Querkontraktionszahl  $\nu$  geschrieben werden (2.39). Zu den ersten zwei Ungleichungen, welche sich auch für die positive Definitheit mit dem symmetrischen Cauchyschen Spannungstensor  $\tau_{ij}$  ergaben (2.38), kommt noch die Bedingung für den Drehmodul  $\gamma$  hinzu. Wegen der Antisymmetrie der Torsion  $T_{ijk}$  und der Hyperspannungen  $H_{ijk}$  in den letzten zwei Indizes  $j$  und  $k$ , läßt sich aus der Beziehung (6.9) eine entsprechende Relation zwischen dem dreistufigen Hyperspannungstensor  $H_{ijk}$  und dem entsprechenden zweistufigen Tensor  $H_{ij}$

$$H_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{jkl} H_{ikl}, \quad H_{ikl} = \epsilon_{klj} H_{ij}, \quad (6.42)$$

angeben. Damit kann das Materialgesetz (6.30) in ein solches zwischen den Größen  $H_{ij}$  und  $\alpha_{ij}$  überführt werden. Dabei wird die zweite Relation von Gl. (6.42) und Gl. (6.9) in das Materialgesetz (6.30) eingesetzt und anschließend verjüngt. Als Ergebnis bekommt man das auf zweistufige Tensoren reduzierte Materialgesetz

$$\begin{aligned} H_{ij} &= H_{ij}^1 + H_{ij}^2 + H_{ij}^3 \\ &= a_1 (\alpha_{(ij)} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \alpha_{kk}) + a_2 \alpha_{[ij]} + a_3 \frac{1}{3} \delta_{ij} \alpha_{kk}, \end{aligned} \quad (6.43)$$

mit den irreduziblen Parametern

$$a_1 = c_1 - c_2, \quad a_2 = c_1 - c_2 + 2c_3, \quad a_3 = c_1 + 2c_2. \quad (6.44)$$

Dieses setzt sich ebenfalls aus den drei folgenden unabhängigen Anteilen

$$\alpha_{ij}^1 = \alpha_{(ij)} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \alpha_{kk} \quad \text{Tentor}, \quad (6.45)$$

$$\alpha_{ij}^2 = \alpha_{[ij]} \quad \text{Trator}, \quad (6.46)$$

$$\alpha_{ij}^3 = \frac{1}{3} \delta_{ij} \alpha_{kk} \quad \text{Axitor}, \quad (6.47)$$

zusammen und wurde von Lazar [10] in der Eichfeldtheorie der Versetzungen benutzt. Die Bezeichnungen für die drei irreduziblen Anteile gehen auf Hehl [116] zurück. Für die positive Definitheit der Versetzungskernenergie

$$W_{\text{ke}} = \frac{1}{4} H_{ijk} T_{ijk} \equiv \frac{1}{2} H_{ij} \alpha_{ij} \geq 0 \quad (6.48)$$

muß immer

$$a_1 \geq 0, \quad a_2 \geq 0, \quad a_3 \geq 0, \quad (6.49)$$

erfüllt sein.

Setzt man die Konstitutivgleichungen (6.28)–(6.31) unter Berücksichtigung der Gln. (6.5), (6.8), (6.12) und (6.15) ins Gleichungssystem (6.22)–(6.24) ein, so ergibt sich ein geschlossenes Gleichungssystem von 15 gekoppelten linearen partiellen Differentialgl.  $\Delta \equiv (\Delta_1, \dots, \Delta_{15}) = 0$  für die unbekannten Feldvariablen  $u_i, \phi_{ij}, \varphi_i$

$$\begin{aligned} & \rho(\ddot{u}_i + \dot{\varphi}_i) - \lambda \delta_{ij}(u_{k,kj} + \phi_{kk,j}) \\ & - \mu(u_{i,jj} + u_{j,ji} + \phi_{ij,j} + \phi_{ji,i}) - \gamma(u_{i,jj} - u_{j,ij} + \phi_{ij,j} - \phi_{ji,i}) = 0, \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$\begin{aligned} & \rho(\dot{u}_i + \varphi_i) - d_1 \delta_{ij}(\varphi_{l,lj} - \dot{\phi}_{l,j}) \\ & - d_2(\varphi_{i,jj} - \dot{\phi}_{ij,j} + \varphi_{j,ji} - \dot{\phi}_{ji,i}) - d_3(\varphi_{i,jj} - \dot{\phi}_{ij,j} - \varphi_{j,ji} + \dot{\phi}_{ji,i}) = 0, \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} & - d_1 \delta_{ij}(\dot{\varphi}_{l,l} - \ddot{\phi}_{ll}) - d_2(\dot{\varphi}_{i,j} - \ddot{\phi}_{ij} + \dot{\varphi}_{j,i} - \ddot{\phi}_{ji}) - d_3(\dot{\varphi}_{i,j} - \ddot{\phi}_{ij} - \dot{\varphi}_{j,i} + \ddot{\phi}_{ji}) \\ & + c_1(\phi_{ik,jk} - \phi_{ij,kk}) + c_2(\phi_{ji,kk} - \phi_{jk,ik} + \phi_{kj,ik} - \phi_{ki,jk}) + c_3[\delta_{ij}(\phi_{lk,lk} - \phi_{ll,kk}) \\ & + (\phi_{ll,ji} - \phi_{lj,li})] + \lambda \delta_{ij}(u_{l,l} + \phi_{ll}) + \mu(u_{i,j} + u_{j,i} + \phi_{ij} + \phi_{ji}) \\ & + \gamma(u_{i,j} - u_{j,i} + \phi_{ij} - \phi_{ji}) = 0. \end{aligned} \quad (6.52)$$

## 6.1 Lie-Punkt Symmetrien

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit den infinitesimalen kontinuierlichen Transformationen befassen, die das Gleichungssystem (6.50)–(6.52) invariant lassen. Diese Transformationen wirken auf die unabhängigen  $(t, \mathbf{x})$  und abhängigen Variablen  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\varphi})$  und bilden eine Lie-Gruppe  $G$ , die das Gleichungssystem (6.50)–(6.52) invariant läßt. Die infinitesimale Gruppen-Wirkung hat für die unabhängigen  $(t, \mathbf{x})$  und abhängigen Variablen  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\varphi})$  folgende Gestalt

$$x'_i = x_i + \varepsilon X_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}) + \dots \quad (6.53)$$

$$t' = t + \varepsilon \tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}) + \dots \quad (6.54)$$

$$u'_\alpha = u_\alpha + \varepsilon U_\alpha(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}) + \dots \quad (6.55)$$

$$\varphi'_\alpha = \varphi_\alpha + \varepsilon \Psi_\alpha(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}) + \dots \quad (6.56)$$

$$\phi'_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\beta} + \varepsilon \Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}) + \dots \quad (6.57)$$

Die *infinitesimalen Erzeuger* sind definiert durch

$$X_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}) := \left. \frac{\partial x'_i}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad (6.58)$$

$$\tau(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}) := \left. \frac{\partial t'}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad (6.59)$$

$$U_\alpha(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}) := \left. \frac{\partial u'_\alpha}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad (6.60)$$

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}) := \left. \frac{\partial \varphi'_\alpha}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad (6.61)$$

$$\Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}) := \left. \frac{\partial \phi'_{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (6.62)$$

Mit diesen infinitesimalen Erzeugern läßt sich das entsprechende Vektorfeld

$$\mathbf{v} = \tau \frac{\partial}{\partial t} + X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + U_\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + \Psi_\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi_\alpha} + \Phi_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \phi_{\alpha\beta}}, \quad (6.63)$$

konstruieren. Da das zu untersuchende Gleichungssystem zweiter Ordnung ist, benötigt man für das Berechnen der Lie-Symmetrien die zweite Prolongation

$$\text{pr}^{(2)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}. \quad (6.64)$$

Die Vektorfelder  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  sind von folgender Natur

$$\mathbf{a} = \bar{U}_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha,i}} + \bar{U}_{\alpha t} \frac{\partial}{\partial \dot{u}_\alpha} + \bar{U}_{\alpha ij} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha,ij}} + \bar{U}_{\alpha it} \frac{\partial}{\partial \dot{u}_{\alpha,i}} + \bar{U}_{\alpha tt} \frac{\partial}{\partial \ddot{u}_\alpha}, \quad (6.65)$$

$$\mathbf{b} = \bar{\Psi}_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial \varphi_{\alpha,i}} + \bar{\Psi}_{\alpha t} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_\alpha} + \bar{\Psi}_{\alpha ij} \frac{\partial}{\partial \varphi_{\alpha,ij}} + \bar{\Psi}_{\alpha it} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_{\alpha,i}} + \bar{\Psi}_{\alpha tt} \frac{\partial}{\partial \ddot{\varphi}_\alpha}, \quad (6.66)$$

$$\mathbf{c} = \bar{\Phi}_{\alpha\beta i} \frac{\partial}{\partial \phi_{\alpha\beta,i}} + \bar{\Phi}_{\alpha\beta t} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}_{\alpha\beta}} + \bar{\Phi}_{\alpha\beta ij} \frac{\partial}{\partial \phi_{\alpha\beta,ij}} + \bar{\Phi}_{\alpha\beta it} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}_{\alpha\beta,i}} + \bar{\Phi}_{\alpha\beta tt} \frac{\partial}{\partial \ddot{\phi}_{\alpha\beta}}, \quad (6.67)$$

mit den Komponenten

$$\bar{U}_{\alpha i} = D_i(U_\alpha - X_k u_{\alpha,k} - \tau \dot{u}_\alpha) + X_k u_{\alpha,ki} + \tau \dot{u}_{\alpha,i}, \quad (6.68)$$

$$\bar{U}_{\alpha t} = D_t(U_\alpha - X_k u_{\alpha,k} - \tau \dot{u}_\alpha) + X_k \dot{u}_{\alpha,k} + \tau \ddot{u}_\alpha, \quad (6.69)$$

$$\bar{U}_{\alpha ij} = D_i D_j (U_\alpha - X_k u_{\alpha,k} - \tau \dot{u}_\alpha) + X_k u_{\alpha,ki j} + \tau \dot{u}_{\alpha,ij}, \quad (6.70)$$

$$\bar{U}_{\alpha it} = D_i D_t (U_\alpha - X_k u_{\alpha,k} - \tau \dot{u}_\alpha) + X_k \dot{u}_{\alpha,ki} + \tau \ddot{u}_{\alpha,i}, \quad (6.71)$$

$$\bar{U}_{\alpha tt} = D_t D_t (U_\alpha - X_k u_{\alpha,k} - \tau \dot{u}_\alpha) + X_k \ddot{u}_{\alpha,k} + \tau \dddot{u}_\alpha, \quad (6.72)$$

und entsprechend gleiche Ausdrücke für die Erzeugenden der Prolongationsfelder  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$ . Für das Feld  $\mathbf{b}$  ist  $U_\alpha$ ,  $u_\alpha$  durch  $\Psi_\alpha$ ,  $\varphi_\alpha$  und für  $\mathbf{c}$  durch  $\Phi_{\alpha\beta}$ ,  $\phi_{\alpha\beta}$  mit den entsprechenden höheren Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung in den Formeln (6.68)–(6.72) zu ersetzen. Wendet man das infinitesimale Kriterium (2.134) mit dem Vektorfeld (6.63) auf das System (6.50)–(6.52) an, dann ergeben sich für die Komponenten von  $\mathbf{v}$  folgende Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} & \rho(\bar{U}_{itt} + \bar{\Psi}_{it}) - \lambda \delta_{ij}(\bar{U}_{kkj} + \bar{\Phi}_{kkj}) - \mu(\bar{U}_{ijj} + \bar{U}_{jji} + \bar{\Phi}_{ijj} + \bar{\Phi}_{jji}) \\ & - \gamma(\bar{U}_{ijj} - \bar{U}_{jji} + \bar{\Phi}_{ijj} - \bar{\Phi}_{jji}) \Big|_{\Delta=0} = 0, \end{aligned} \quad (6.73)$$

$$\begin{aligned} & \rho(\bar{U}_{it} + \bar{\Psi}_i) - d_1 \delta_{ij}(\bar{\Psi}_{llj} - \bar{\Phi}_{lljt}) - d_2(\bar{\Psi}_{ijj} - \bar{\Phi}_{ijjt} + \bar{\Psi}_{jji} - \bar{\Phi}_{jijt}) \\ & - d_3(\bar{\Psi}_{ijj} - \bar{\Phi}_{ijjt} - \bar{\Psi}_{jji} + \bar{\Phi}_{jijt}) \Big|_{\Delta=0} = 0, \end{aligned} \quad (6.74)$$

$$\begin{aligned} & - d_1 \delta_{ij}(\bar{\Psi}_{litt} - \bar{\Phi}_{litt}) - d_2(\bar{\Psi}_{ijt} - \bar{\Phi}_{ijtt} + \bar{\Psi}_{jit} - \bar{\Phi}_{jitt}) - d_3(\bar{\Psi}_{ijt} - \bar{\Phi}_{ijtt} - \bar{\Psi}_{jit} + \bar{\Phi}_{jitt}) \\ & + c_1(\bar{\Phi}_{ikjk} - \bar{\Phi}_{ijkk}) + c_2(\bar{\Phi}_{jikk} - \bar{\Phi}_{jkik} + \bar{\Phi}_{kjik} - \bar{\Phi}_{kijj}) \\ & + c_3[\delta_{ij}(\bar{\Phi}_{lklk} - \bar{\Phi}_{llkk}) + (\bar{\Phi}_{llji} - \bar{\Phi}_{ljl i})] + \lambda \delta_{ij}(\bar{U}_{ll} + \bar{\Phi}_{ll}) \\ & + \mu(\bar{U}_{ijj} + \bar{U}_{jji} + \bar{\Phi}_{ijj} + \bar{\Phi}_{jji}) + \gamma(\bar{U}_{ijj} - \bar{U}_{jji} + \bar{\Phi}_{ijj} - \bar{\Phi}_{jji}) \Big|_{\Delta=0} = 0. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Durch ihre Lösung findet man die Symmetrien für die Euler-Lagrange Gln. (6.50)–(6.52)

$$\tau = d_4, \quad (6.76)$$

$$X_i = d_i + \epsilon_{ijk} x_j a_k, \quad (6.77)$$

$$U_\alpha = c u_\alpha + \epsilon_{\alpha jk} u_j a_k - \tilde{f}_\alpha(t, x), \quad (6.78)$$

$$\Psi_\alpha = c \varphi_\alpha + \epsilon_{\alpha jk} \varphi_j a_k + \dot{\tilde{f}}_\alpha(t, x), \quad (6.79)$$

$$\Phi_{\alpha\beta} = c \phi_{\alpha\beta} + \epsilon_{\alpha jk} \phi_{j\beta} a_k + \epsilon_{\beta jk} \phi_{\alpha j} a_k + \tilde{f}_{\alpha,\beta}. \quad (6.80)$$

Die Eichsymmetrie wird durch die beliebige und stetig differenzierbare Funktion  $\tilde{f}_i$  und deren räumliche sowie zeitliche Ableitungen beschrieben. Da diese schon in der Lagrangendichte vorhanden ist, wird sie in den Euler-Lagrange Gln. vererbt. Die Lie-Algebra der *infinitesimalen Symmetrien* wird von den folgenden Vektorfelder aufgespannt

$$v^1 = \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{Translation in der Zeit}), \quad (6.81)$$

$$v_i^2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{Translation im Raum}), \quad (6.82)$$

$$v_i^3 = \epsilon_{ijk} \left( x_j \frac{\partial}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial}{\partial u_k} + \varphi_j \frac{\partial}{\partial \varphi_k} + \phi_{lj} \frac{\partial}{\partial \phi_{lk}} + \phi_{jl} \frac{\partial}{\partial \phi_{kl}} \right) \quad (\text{Rotation im Raum}), \quad (6.83)$$

$$v^4 = u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \varphi_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i} + \phi_{ij} \frac{\partial}{\partial \phi_{ij}} \quad (\text{Skalierung}), \quad (6.84)$$

$$v^5 = -\tilde{f}_i(t, x) \frac{\partial}{\partial u_i} + \dot{\tilde{f}}_i(t, x) \frac{\partial}{\partial \varphi_i} + \tilde{f}_{i,j}(t, x) \frac{\partial}{\partial \phi_{ij}} \quad (\text{Eichsymmetrie}). \quad (6.85)$$

## 6.2 Kanonische Ströme

Man möchte mit den gleichen Methoden wie in den vorherigen Kapiteln Erhaltungssätze und Bilanzgleichungen für die Eichfeldtheorie der Versetzungen herleiten. Die Erhaltungsdichte  $A_4$  und der zugehörige Fluß  $A_i$  hängen jetzt von  $t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}$  und den Ableitungen von  $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi}$  bezüglich der Zeit  $t$  und dem Ort  $\mathbf{x}$  ab. Ist durch den infinitesimalen Erzeuger  $\boldsymbol{\nu}$  von  $G$  eine Variationsymmetrie gegeben, dann heißen die Komponenten  $A_4, A_i$  für den Erhaltungssatz

$$\begin{aligned} A_4 = & \mathcal{L}\tau + (U_\alpha - X_j u_{\alpha,j} - \tau \dot{u}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} + (\Psi_\alpha - X_j \varphi_{\alpha,j} - \tau \dot{\varphi}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\alpha} \\ & + (\Phi_{\alpha\beta} - X_j \phi_{\alpha\beta,j} - \tau \dot{\varphi}_{\alpha\beta}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{\alpha\beta}}, \end{aligned} \quad (6.86)$$

$$\begin{aligned}
A_i = & \mathcal{L} X_i + (U_\alpha - X_j u_{\alpha,j} - \tau \dot{u}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} + (\Psi_\alpha - X_j \varphi_{\alpha,j} - \tau \dot{\varphi}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\alpha,i}} \\
& + (\Phi_{\alpha\beta} - X_j \phi_{\alpha\beta,j} - \tau \dot{\phi}_{\alpha\beta}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha\beta,i}}.
\end{aligned} \tag{6.87}$$

### 6.2.1 Translationsstrom.

Die Translationen im Raum und in der Zeit sind durch folgende Formeln

$$x'_i = x_i + \varepsilon_k \delta_{ki}, \quad t' = t + \varepsilon_4 \delta_{44}, \quad u'_\alpha = u_\alpha, \quad \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha, \quad \phi'_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\beta} \tag{6.88}$$

gegeben. Die entsprechenden Erzeugenden der infinitesimalen Transformationen lauten:

$$X_{ki} = \delta_{ki}, \quad \tau = \delta_{44}, \quad U_\alpha = 0, \quad \Psi_\alpha = 0, \quad \Phi_{\alpha\beta} = 0. \tag{6.89}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (6.86), (6.87) und (6.89) erhält man für die Translation folgende Ströme

$$A_{ki} = \mathcal{L} \delta_{ki} - u_{\alpha,k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} - \varphi_{\alpha,k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\alpha,i}} - \phi_{\alpha\beta,k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha\beta,i}}, \tag{6.90}$$

$$A_{k4} = -u_{\alpha,k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} - \varphi_{\alpha,k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\alpha} - \phi_{\alpha\beta,k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{\alpha\beta}}, \tag{6.91}$$

$$A_{4i} = -\dot{u}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} - \dot{\varphi}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\alpha,i}} - \dot{\phi}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha\beta,i}}, \tag{6.92}$$

$$A_{44} = \mathcal{L} - \dot{u}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} - \dot{\varphi}_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\alpha} - \dot{\phi}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{\alpha\beta}}. \tag{6.93}$$

Diese Ströme können mit Hilfe der Impulsdichte  $p_i$ , der Impulsdichte des Versetzungsstromes  $D_{ij}$ , der Spannungen  $\sigma_{ij}$  und der Hyperspannungen  $H_{ijk}$  folgendermaßen geschrieben werden

$$P_{ki}^c := -A_{ki} = -\mathcal{L} \delta_{ki} - \sigma_{\alpha i} u_{\alpha,k} - D_{\alpha i} \varphi_{\alpha,k} + H_{\alpha\beta i} \phi_{\alpha\beta,k}, \tag{6.94}$$

$$\mathcal{P}_k^c := A_{k4} = -p_\alpha u_{\alpha,k} - D_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta,k}, \tag{6.95}$$

$$S_i^c := A_{4i} = \sigma_{\alpha i} \dot{u}_\alpha + D_{\alpha i} \dot{\varphi}_\alpha - H_{\alpha\beta i} \dot{\phi}_{\alpha\beta}, \tag{6.96}$$

$$\mathcal{H}^c := -A_{44} = -\mathcal{L} + p_\alpha \dot{u}_\alpha + D_{\alpha\beta} \dot{\phi}_{\alpha\beta}. \tag{6.97}$$

Der Index c steht für die Bezeichnung canonical aus dem Englischen und wird ab jetzt immer die kanonische Ströme kennzeichnen. Der Tensor  $P_{ki}^c$  ist der kanonische Eshelbysche Spannungstensor. Die Vektorgößen  $\mathcal{P}_k^c$ ,  $S_i^c$  bezeichnen entsprechend den kanonischen Pseudoimpuls und den Poynting Vektor. Das Skalar  $\mathcal{H}^c$  steht für die kanonische totale Energiedichte da. Alle diese Größen erfüllen folgende lokale Erhaltungssätze

$$D_t \mathcal{P}_k^c - D_i P_{ki}^c = 0, \tag{6.98}$$

$$D_t \mathcal{H}^c - D_i S_i^c = 0. \tag{6.99}$$

Aus diesen kann man, unter Verwendung des Gaußschen Satzes und Integration, die globalen Erhaltungssätze für die kanonischen Ströme des Impulses und der Energie erhalten

$$\int_V D_t \mathcal{P}_k^c dV - \int_S P_{ki}^c n_i dS = 0, \quad (6.100)$$

$$\int_V D_t \mathcal{H}^c dV - \int_S S_i^c n_i dS = 0. \quad (6.101)$$

### 6.2.2 Rotationsstrom

Die Gruppenwirkung der Rotation wirkt gleichzeitig im Raum der unabhängigen  $(\mathbf{x}, t)$  und abhängigen Variablen  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\phi})$  und lautet

$$x'_i = x_i + \epsilon_{ikj} x_j \varepsilon_k, \quad t' = t, \quad u'_\alpha = u_\alpha + \epsilon_{k\beta\alpha} u_\beta \varepsilon_k, \quad (6.102)$$

$$\varphi'_\alpha = \varphi_\alpha + \epsilon_{k\beta\alpha} \varphi_\beta \varepsilon_k, \quad \phi'_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\beta} + (\epsilon_{kj\alpha} \phi_{j\beta} + \epsilon_{kj\beta} \phi_{\alpha j}) \varepsilon_k. \quad (6.103)$$

Die dazu gehörenden infinitesimalen Transformationen heißen

$$X_{ik} = \epsilon_{ikj} x_j, \quad U_{\alpha k} = \epsilon_{\alpha k\beta} u_\beta, \quad \Psi_{\alpha k} = \epsilon_{\alpha k\beta} \varphi_\beta, \quad \Phi_{\alpha\beta k} = \epsilon_{\alpha k j} \phi_{j\beta} + \epsilon_{\beta k j} \phi_{\alpha j}. \quad (6.104)$$

Aus den oben angegebenen Erzeugenden, erhält man aus den Gln. (6.86) und (6.87) die folgenden Ströme

$$\begin{aligned} A_{ki} = \epsilon_{kmj} \left[ x_m \left( \mathcal{L} \delta_{ij} - u_{\alpha,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} - \varphi_{\alpha,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\alpha,i}} - \phi_{\alpha\beta,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha\beta,i}} \right) \right. \\ \left. + u_m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{j,i}} + \varphi_m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{j,i}} + \phi_{ml} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{ji,l}} + \phi_{lm} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{li,j}} \right] \end{aligned} \quad (6.105)$$

$$\begin{aligned} A_{k4} = \epsilon_{kmj} \left[ u_m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_j} + \varphi_m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_j} + \phi_{ml} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{jl}} + \phi_{lm} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{lj}} \right. \\ \left. - x_j \left( u_{\alpha,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} + \varphi_{\alpha,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\alpha} + \phi_{\alpha\beta,j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{\alpha\beta}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.106)$$

Der Tensor der kanonischen Drehimpulsflußdichte und der Vektor der Pseudodrehimpulsdichte werden durch folgende Ausdrücke

$$M_{ki}^c := -A_{ki} = \epsilon_{kmj} (x_m P_{ji}^c + \sigma_{ji} u_m + D_{ji} \varphi_m - H_{jli} \phi_{ml} - H_{lji} \phi_{lm}), \quad (6.107)$$

$$\mathcal{M}_k^c := A_{k4} = \epsilon_{kmj} (x_m \mathcal{P}_j^c + p_j u_m + D_{jl} \phi_{ml} + D_{lj} \phi_{lm}) \quad (6.108)$$

definiert. Diese kann man in zwei Anteilen zerlegen, den kanonischen orbitalen  $M_{ki}^{c(o)}$  und den inneren Drehimpulsanteil  $M_{ki}^{c(i)}$

$$M_{ki}^c = M_{ki}^{c(o)} + M_{ki}^{c(i)}, \quad \mathcal{M}_k^c = \mathcal{M}_k^{c(o)} + \mathcal{M}_k^{c(i)}, \quad (6.109)$$

wobei die einzelnen Anteile folgendermaßen

$$M_{ki}^{c(o)} = \epsilon_{kmj} x_m P_{ji}^c, \quad (6.110)$$

$$M_{ki}^{c(i)} = \epsilon_{kmj} (\sigma_{ji} u_m + D_{ji} \varphi_m - H_{jli} \phi_{ml} - H_{lji} \phi_{lm}), \quad (6.111)$$

$$\mathcal{M}_k^{c(o)} = \epsilon_{kmj} x_m \mathcal{P}_j^c, \quad (6.112)$$

$$\mathcal{M}_k^{c(i)} = \epsilon_{kmj} (p_j u_m + D_{jl} \phi_{ml} + D_{lj} \phi_{lm}) \quad (6.113)$$

aussehen. Damit bekommt man für die Drehimpulsbilanz

$$D_t \mathcal{M}_k^c - D_i M_{ki}^c = D_t \mathcal{M}_k^{c(o)} - D_i M_{ki}^{c(o)} + D_t \mathcal{M}_k^{c(i)} - D_i M_{ki}^{c(i)}. \quad (6.114)$$

Aufgrund der Erhaltung des Pseudoimpulses (6.98), wird aus dem orbitalen Anteil

$$D_t \mathcal{M}_k^{c(o)} - D_i M_{ki}^{c(o)} = \epsilon_{kjm} P_{jm}^c. \quad (6.115)$$

Für den inneren Drehimpuls folgt aus der Rotationsinvarianz unter Benutzung der Gln. (6.5), (6.8), (6.12), (6.15) und der Euler-Lagrange Gln. (6.22)–(6.24) die Beziehung

$$\begin{aligned} D_t \mathcal{M}_k^{c(i)} - D_i M_{ki}^{c(i)} = & \epsilon_{kmj} (-\sigma_{jl} \beta_{ml} + D_{jl} I_{ml} - \frac{1}{2} H_{jil} T_{mil} - H_{lij} T_{lim} \\ & - \sigma_{lj} \phi_{lm} + D_{lj} \dot{\phi}_{lm} - H_{lij} \phi_{li,m}). \end{aligned} \quad (6.116)$$

Letzlich bekommt man aus den Gln. (6.94), (6.115) und (6.116) für die Bilanzgleichung des Drehimpulses die sogenannte *Isotropiebedingung* des Kontinuums.

$$D_t \mathcal{M}_k^c - D_i M_{ki}^c = \epsilon_{kmj} (-\sigma_{jl} \beta_{ml} - \sigma_{lj} \beta_{lm} + D_{lj} I_{lm} + D_{jl} I_{ml} - \frac{1}{2} H_{jil} T_{mil} - H_{lij} T_{lim}). \quad (6.117)$$

Im Fall, daß ein isotropes Material vorliegt, wird mit Hilfe der konstitutiven Gln. (6.29)–(6.31) aus der Isotropiebedingung (6.117) der folgende lokale Erhaltungssatz

$$D_t \mathcal{M}_k^c - D_i M_{ki}^c = 0. \quad (6.118)$$

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes, läßt sich durch Integration, der globale Erhaltungssatz für den kanonischen Drehimpuls herleiten

$$\int_V D_t \mathcal{M}_k^c dV - \int_S M_{ki}^c n_i dS = 0. \quad (6.119)$$

### 6.2.3 Skalierungsstrom

In der Eichtheorie der Versetzungen, ist die Skalierungsgruppe (Dilatationsgruppe) weder eine Variationsgruppe noch eine Divergenzgruppe. Durch die Existenz der Versetzungen im Material, werden innere Längen in die Physik des Problems eingeführt.

Die Selbstähnlichkeit wird gebrochen. Es besteht aber weiterhin die Möglichkeit, die gebrochene Ströme auszurechnen. Die Skalierungsgruppe wirkt wie folgt

$$x'_i = x_i + \varepsilon x_i, \quad t' = t + \varepsilon t, \quad (6.120)$$

$$u'_\alpha = u_\alpha + \varepsilon d_u u_\alpha, \quad \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha + \varepsilon d_\varphi \varphi_\alpha, \quad \phi'_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\beta} + \varepsilon d_\phi \phi_{\alpha\beta}, \quad (6.121)$$

infinitesimal auf die unabhängigen und abhängigen Variablen. Die infinitesimale Erzeuger sind gegeben durch

$$X_i = x_i, \quad \tau = t, \quad U_\alpha = d_u u_\alpha, \quad \Psi_\alpha = d_\varphi \varphi_\alpha, \quad \Phi_{\alpha\beta} = d_\phi \phi_{\alpha\beta}, \quad (6.122)$$

wobei  $d_u$  die Skalierungsdimension des Verschiebungsvektorfeldes und  $d_\varphi, d_\phi$  entsprechend die Vektor und Tensorfelder der Eichpotentiale darstellen. Setzt man die infinitesimale Erzeuger (6.122) in die Beziehungen für die Ströme (6.86) und (6.87) ein, so erhält man folgende Ausdrücke für die Dichten der Skalierungsflüsse

$$\begin{aligned} A_i = x_i \mathcal{L} + (d_u u_\alpha - x_k u_{\alpha,k} - t \dot{u}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{\alpha,i}} + (d_\varphi \varphi_\alpha - x_k \varphi_{\alpha,k} - t \dot{\varphi}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\alpha,i}} \\ + (d_\phi \phi_{\alpha\beta} - x_k \phi_{\alpha\beta,k} - t \dot{\phi}_{\alpha\beta}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha\beta,i}}, \end{aligned} \quad (6.123)$$

$$\begin{aligned} A_4 = t \mathcal{L} + (d_u u_\alpha - x_k u_{\alpha,k} - t \dot{u}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_\alpha} + (d_\varphi \varphi_\alpha - x_k \varphi_{\alpha,k} - t \dot{\varphi}_\alpha) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_\alpha} \\ + (d_\phi \phi_{\alpha\beta} - x_k \phi_{\alpha\beta,k} - t \dot{\phi}_{\alpha\beta}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{\alpha\beta}}. \end{aligned} \quad (6.124)$$

Drückt man diese mittels der Spannungen, Hyperspannungen, des Poynting Vektors, des kanonischen Pseudomomentvektors, des Eshelbyschen Spannungstensors und der Energiedichte aus, so ergibt sich folgendes Resultat

$$Y_i^c := -A_i = x_j P_{ji}^c - t S_i^c + d_u \sigma_{ji} u_j + d_\varphi D_{ji} \varphi_j - d_\phi H_{jli} \phi_{jl}, \quad (6.125)$$

$$\mathcal{Y}^c := A_4 = x_j \mathcal{P}_j^c - t \mathcal{H}^c + d_u p_j u_j + d_\phi D_{jl} \phi_{jl}. \quad (6.126)$$

Die Skalierungsdimensionen der abhängigen Variablen lauten

$$d_u = -\frac{d-2}{2}, \quad d_\varphi = -\frac{d}{2}, \quad d_\phi = -\frac{d}{2}, \quad d = n+1, \quad (6.127)$$

wobei  $d = n+1$  die Raumzeitdimension angibt. Im dynamischen Fall ist  $d = 4$  und somit  $d_u = -1$ ,  $d_\varphi = -2$  und  $d_\phi = -2$ . Mit den Ergebnissen für die Dimensionen (6.127) und unter Berücksichtigung der Gleichungen (6.5), (6.12), (6.8), (6.15) und der lokalen Erhaltungssätze (6.98) ergibt sich die folgende lokale Bilanzgleichung

$$D_t \mathcal{Y}^c - D_i Y_i^c = -2 \mathcal{L}_{ve}. \quad (6.128)$$

Diese kann unter Nutzung des Gaußschen Satzes in eine globale Bilanzgleichung

$$\int_V D_t \mathcal{Y}^c dV - \int_S Y_i^c n_i dS = -2 \int_V \mathcal{L}_{ve} dV \quad (6.129)$$

gebracht werden.



### 6.2.4 Eichtransformation

Die Translationen im Raum und in der Zeit, sowie die Rotationen im Raum sind Erzeuger einer Variationssymmetrie einer endlichen Lie-Gruppe, die zu Erhaltungssätzen führen. Aus den Beziehungen (6.86), (6.87) folgt für den Gruppenerzeuger  $v^5$

$$G_i^c := -A_i = -\sigma_{ji} \tilde{f}_j(t, x) + D_{ji} \dot{\tilde{f}}_j(t, x) - H_{jki} \tilde{f}_{j,k}(t, x), \quad (6.130)$$

$$\mathcal{G}^c := A_4 = -p_j \tilde{f}_j(t, x) + D_{ji} \tilde{f}_{j,i}(t, x). \quad (6.131)$$

Die folgende Kontinuitätsgleichung

$$D_t \mathcal{G}^c - D_i G_i^c = \tilde{f}_{j,ki}(t, x) H_{j[ki]} = 0, \quad (6.132)$$

impliziert einen lokalen Erhaltungssatz. Aus diesem läßt sich ein globaler Erhaltungssatz ableiten

$$\int_V D_t \mathcal{G}^c dV - \int_S G_i^c n_i dS = 0. \quad (6.133)$$

### 6.2.5 Eichinvariante Ströme

Die Tatsache, daß alle lokale Bilanzgleichungen und Erhaltungssätze für das gesamte System, bestehend aus dem elastoplastischen und dem Versetzungsanteil der Lagrange-dichte, in eine eichinvariante Form gebracht werden können, ist für die einzelnen Ströme nicht immer gegeben. Nur die Ströme, die aus der Translationsymmetrie stammen, lassen sich auch eichinvariant schreiben. Als erstes wird der kanonische Eshelbysche Spannungstensor mit Hilfe von den Gleichungen (6.5), (6.8), (6.15) und die Bilanzgleichung (6.23) umgeschrieben. Um den kanonischen Pseudoimpuls umzuschreiben, benutzt man anstatt der Bilanzgleichung (6.23) die Gl. (6.22). Für die Umschreibung der kanonischen Energiedichte werden die Gl. (6.12), (6.15) und die Bilanzgleichung (6.22) gebraucht. Der Poynting Vektor  $S_i$  läßt sich mit den gleichen Gleichungen wie die kanonische Energiedichte umschreiben, aber anstatt von der Bilanzgleichung (6.22) wird die Gl. (6.23) benutzt. Mit den oben erwähnten Umformungen lauten jetzt die kanonische Ströme der Translation:

$$P_{ki}^c = P_{ki} - D_t(D_{\alpha i} \phi_{\alpha k}) + D_\beta(H_{\alpha\beta i} \phi_{\alpha k}), \quad (6.134)$$

$$\mathcal{P}_k^c = \mathcal{P}_k - D_\beta(D_{\alpha\beta} \phi_{\alpha k}), \quad (6.135)$$

$$S_i^c = S_i + D_t(D_{\alpha i} \varphi_\alpha) - D_\beta(H_{\alpha\beta i} \varphi_\alpha), \quad (6.136)$$

$$\mathcal{H}^c = \mathcal{H} + D_\beta(D_{\alpha\beta} \varphi_\alpha). \quad (6.137)$$

Die eichinvariante Ströme sind folgendermaßen definiert

$$P_{ki} := -\mathcal{L} \delta_{ki} - \sigma_{\alpha i} \beta_{\alpha k} + D_{\alpha i} I_{\alpha k} - H_{\alpha\beta i} T_{\alpha\beta k}, \quad (6.138)$$

$$\mathcal{P}_k := -p_\alpha \beta_{\alpha k} + D_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta k}, \quad (6.139)$$

$$S_i := \sigma_{\alpha i} v_\alpha - H_{\alpha\beta i} I_{\alpha\beta}, \quad (6.140)$$

$$\mathcal{H} := -\mathcal{L} + p_\alpha v_\alpha + D_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta}. \quad (6.141)$$

Die lokale Erhaltungssätze heißen jetzt

$$D_t \mathcal{P}_k - D_i P_{ki} = 0, \quad (6.142)$$

$$D_t \mathcal{H} - D_i S_i = 0, \quad (6.143)$$

da die Divergenzterme sich gegenseitig aufheben und die Terme

$$D_i D_\beta (H_{\alpha\beta i} \phi_{\alpha k}) = 0, \quad D_i D_\beta (H_{\alpha\beta i} \varphi_\alpha) = 0, \quad (6.144)$$

verschwinden wegen der Antisymmetrie von  $H_{i[jk]}$  in den letzten zwei Indizes. Aus dem Gaußschen Satz folgen der Impuls und Energieerhaltungssatz für die eichinvarianten Größen in integraler Form

$$\int_V D_t \mathcal{P}_k dV - \int_S P_{ki} n_i dS = 0, \quad (6.145)$$

$$\int_V D_t \mathcal{H} dV - \int_S S_i n_i dS = 0. \quad (6.146)$$

## 6.3 Konfigurationskräfte und Momente

### 6.3.1 Translationsstrom

#### Elastoplastischer Anteil

Im letzten Abschnitt hat man die Erhaltungssätze für den kanonischen Pseudoimpuls, Pseudodrehimpuls und die Energiedichte hergeleitet. Diese Erhaltungssätze existieren nur für die totale Lagrangedichte  $\mathcal{L}$ , die sich aus den kinetischen und potentiellen Energien des elastoplastischen und Versetzungsanteils zusammensetzen. Wird nur einer der beiden Anteile betrachtet, gelten die Erhaltungssätze für die kanonischen Ströme nicht länger und Konfigurationskräfte und Momente treten auf. Wird z.B. nur der elastoplastische Anteil  $\mathcal{L}_{\text{ep}}$  der Lagrangedichte berücksichtigt, dann erhält man aus Gl. (6.94) für die Translationssymmetrie und den Gln. (6.86) und (6.87) für die Ströme

$$P_{ki}^c := -A_{ki} = -\mathcal{L}_{\text{ep}} \delta_{ki} - \sigma_{\alpha i} u_{\alpha, k}, \quad (6.147)$$

$$\mathcal{P}_k^c := A_{k4} = -p_\alpha u_{\alpha, k}, \quad (6.148)$$

$$S_i^c := A_{4i} = \sigma_{\alpha i} \dot{u}_\alpha, \quad (6.149)$$

$$\mathcal{H}^c := -A_{44} = -\mathcal{L}_{\text{ep}} + p_\alpha \dot{u}_\alpha. \quad (6.150)$$

Die lokalen Erhaltungssätze (6.98) sind dann gebrochen. Auf der rechten Seite erscheinen jetzt die Konfigurationskraft und die Konfigurationsarbeit

$$D_t \mathcal{P}_k^c - D_i P_{ki}^c = \mathcal{F}_k^c, \quad (6.151)$$

$$D_t \mathcal{H}^c - D_i S_i^c = \mathcal{W}^c. \quad (6.152)$$

Diese sind gegeben durch folgende Ausdrücke:

$$\mathcal{F}_k^c = p_\alpha \varphi_{\alpha, k} - \sigma_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta, k}, \quad (6.153)$$

$$\mathcal{W}^c = -p_\alpha \dot{\varphi}_\alpha + \sigma_{\alpha\beta} \dot{\phi}_{\alpha\beta}. \quad (6.154)$$

Die kanonische Form der Konfigurationskraft wurde auf eine andere Art und Weise von Kadić und Edelen [2] hergeleitet. Für den elastoplastischen Anteil  $\mathcal{L}_{\text{ep}}$  der totalen Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  bekommt man aus Gl. (6.134) die eichinvarianten Ströme

$$P_{ki} := -\mathcal{L}_{\text{ep}} \delta_{ki} - \sigma_{\alpha i} \beta_{\alpha k}, \quad (6.155)$$

$$\mathcal{P}_k := -p_\alpha \beta_{\alpha k}, \quad (6.156)$$

$$S_i := \sigma_{\alpha i} v_\alpha, \quad (6.157)$$

$$\mathcal{H} := -\mathcal{L}_{\text{ep}} + p_\alpha v_\alpha. \quad (6.158)$$

Aus diesen Strömen kann man die gebrochenen Erhaltungssätze angeben

$$D_t \mathcal{P}_k - D_i P_{ki} = \mathcal{F}_k, \quad (6.159)$$

$$D_t \mathcal{H} - D_i S_i = \mathcal{W}. \quad (6.160)$$

Die eichinvariante Konfigurationskraft und Konfigurationsarbeit lauten

$$\mathcal{F}_k = -p_\alpha I_{\alpha k} + \sigma_{\alpha \beta} T_{\alpha \beta k}, \quad (6.161)$$

$$\mathcal{W} = \sigma_{\alpha \beta} I_{\alpha \beta}. \quad (6.162)$$

Diese findet man auch in den Arbeiten [118, 119]. Die Verallgemeinerung des wegunabhängigen Integrals  $J_k$  heißt für die inkompatible Elastizität

$$J_k := - \int_V D_t \mathcal{P}_k dV + \int_S P_{ki} n_i dS = \int_V -\mathcal{F}_k dV = \int_V \mathcal{F}_k^{\text{PK}} dV, \quad (6.163)$$

mit der Kraft  $\mathcal{F}_k^{\text{PK}}$  definiert als

$$\mathcal{F}_k^{\text{PK}} := -\mathcal{F}_k. \quad (6.164)$$

Der dynamische Teil der Konfigurationskraft beschreibt den Impulsfluß aus dem Material zum Versetzungsstrom und der statische Teil entspricht der Peach-Koehler Kraft [120], welche die Wechselwirkung zwischen der Spannung und der Versetzungsdichte angibt. Die Konfigurationsarbeit kommt von den Spannungen zustande, welche auf die Versetzungsstromdichte wirken, und dafür sorgen, daß die Versetzungen in Bewegung bleiben. Hätte man noch die Dissipation mitberücksichtigt, dann wäre ein Teil dieser Arbeit in Wärme umgewandelt. Betrachtet man etwas näher die Struktur der Konfigurationskraft und Konfigurationsarbeit, so stellt sich heraus, daß sie die gleiche Form wie die Lorentz-Kraftdichte und die elektromagnetische Leistung besitzt, die durch die Wechselwirkung von elektrischen Ladungen und Strömen mit dem elektromagnetischen Feld zustande kommen [121]

$$\mathcal{F}_k^{\text{ed}} = \rho E_k + \epsilon_{k\beta l} j_\beta B_l, \quad (6.165)$$

$$\mathcal{W}^{\text{ed}} = j_k E_k. \quad (6.166)$$

$E_k$  und  $B_k$  sind die elektrische Feldstärke und magnetische Induktion entsprechend. Leitet man die Konfigurationskraft und Konfigurationsarbeit aus dem Versetzungsanteil  $\mathcal{L}_{\text{ve}}$  der totalen Lagrangedichte  $\mathcal{L}$ , dann bekommt man die gleichen Ergebnisse wie oben, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen.

### Versetzungsanteil

Auf der gleichen Art und Weise wie oben, bekommt man für die kanonischen Ströme des Versetzungsanteils  $\mathcal{L}_{\text{ve}}$  der Lagrangedichte  $\mathcal{L}$

$$P_{ki}^c := -A_{ki} = -\mathcal{L}_{\text{ve}} \delta_{ki} - D_{\alpha i} \varphi_{\alpha,k} + H_{\alpha\beta i} \phi_{\alpha\beta,k}, \quad (6.167)$$

$$\mathcal{P}_k^c := A_{k4} = -D_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta,k}, \quad (6.168)$$

$$S_i^c := A_{4i} = D_{\alpha i} \dot{\varphi}_{\alpha} - H_{\alpha\beta i} \dot{\phi}_{\alpha\beta}, \quad (6.169)$$

$$\mathcal{H}^c := -A_{44} = -\mathcal{L}_{\text{ve}} + D_{\alpha\beta} \dot{\phi}_{\alpha\beta}. \quad (6.170)$$

Die eichinvarianten Ströme des Versetzungsanteils  $\mathcal{L}_{\text{ve}}$  der totalen Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  lauten

$$P_{ki} := -\mathcal{L}_{\text{ve}} \delta_{ki} + D_{\alpha i} I_{\alpha k} - H_{\alpha\beta i} T_{\alpha\beta k}, \quad (6.171)$$

$$\mathcal{P}_k := D_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta k}, \quad (6.172)$$

$$S_i := -H_{\alpha\beta i} I_{\alpha\beta}, \quad (6.173)$$

$$\mathcal{H} := -\mathcal{L}_{\text{ve}} + D_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta}. \quad (6.174)$$

Die Konfigurationskraft und Konfigurationsarbeit berechnet man genauso wie für den elastoplastischen Anteil. Man bekommt das gleiche Resultat nur mit entgegengesetztem Vorzeichen.

### 6.3.2 Rotationsstrom

Auf der gleichen Art und Weise wie man für die Translationen im Raum vorgegangen ist, findet man für den elastoplastischen Anteil der Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{\text{ep}}$

$$M_{ki}^c := -A_{ki} = \epsilon_{kmj} (x_m P_{ji}^c + \sigma_{ji} u_m), \quad (6.175)$$

$$\mathcal{M}_k^c := A_{k4} = \epsilon_{kmj} (x_m \mathcal{P}_j^c + p_j u_m), \quad (6.176)$$

mit  $P_{ji}^c$  und  $\mathcal{P}_j^c$  gegeben durch Gl. (6.147). Dadurch wandelt sich der lokale Erhaltungssatz (6.118) in die folgende Bilanzgleichung um

$$D_t \mathcal{M}_k^c - D_i M_{ki}^c = \epsilon_{kmj} (x_m \mathcal{F}_j^c + \mathcal{A}_{mj}^c). \quad (6.177)$$

Dabei ist  $\mathcal{F}_j^c$  gegeben durch die Gleichung (6.153) und für  $\mathcal{A}_{mj}^c$  ergibt sich folgender Ausdruck

$$\mathcal{A}_{mj}^c = p_j \dot{u}_m + \sigma_{ml} u_{j,l} + \sigma_{lm} u_{l,j}. \quad (6.178)$$

Das  $L_k$ -Integral lautet jetzt

$$L_k := - \int_V D_t \mathcal{M}_k^c dV + \int_S M_{ki}^c n_i dS = \int_V \epsilon_{kjm} (x_m \mathcal{F}_j^c + \mathcal{A}_{mj}^c) dV. \quad (6.179)$$

Man substituiert für den kanonischen Pseudoimpuls  $\mathcal{P}_j^c$  und Eshelbyschen Spannungstensor  $P_{ji}^c$  die Relationen

$$\mathcal{P}_j^c = \mathcal{P}_j + p_\alpha \phi_{\alpha j}, \quad (6.180)$$

$$P_{ji}^c = P_{ji} + \sigma_{\alpha i} \phi_{\alpha j} \quad (6.181)$$

in den Gln. (6.175) und (6.176) für die Rotationsströme des elastoplastischen Anteils der Lagrangedichte und führt anschließend die Definitionen

$$M_{ki}^c = M_{ki} + \epsilon_{kmj} x_m \sigma_{\alpha i} \phi_{\alpha j}, \quad M_{ki} := \epsilon_{kmj} (x_m P_{ji} + \sigma_{ji} u_m), \quad (6.182)$$

$$\mathcal{M}_k^c = \mathcal{M}_k + \epsilon_{kmj} x_m p_\alpha \phi_{\alpha j}, \quad \mathcal{M}_k := \epsilon_{kmj} (x_m \mathcal{P}_j + p_j u_m), \quad (6.183)$$

ein. Dadurch kann die lokale Bilanzgleichung (6.177) in die Form

$$D_t \mathcal{M}_k^c - D_i M_{ki}^c = D_t \mathcal{M}_k - D_i M_{ki} + D_t (\epsilon_{kmj} x_m p_\alpha \phi_{\alpha j}) - D_i (\epsilon_{kmj} x_m \sigma_{\alpha i} \phi_{\alpha j}) \quad (6.184)$$

gebracht werden. Es gilt

$$D_t \mathcal{M}_k - D_i M_{ki} = \epsilon_{kmj} (x_m \mathcal{F}_j + \sigma_{im} \beta_{ij} + \sigma_{mi} \beta_{ji} + p_m \varphi_j + \sigma_{ji} \phi_{mi}). \quad (6.185)$$

Aus der lokalen Bilanzgleichung (6.185) ergibt sich das wegunabhängige Integral

$$\begin{aligned} L_k &:= - \int_V D_t \mathcal{M}_k dV + \int_S M_{ki} n_i dS \\ &= \int_V \epsilon_{kjm} (x_m \mathcal{F}_j + \sigma_{im} \beta_{ij} + \sigma_{mi} \beta_{ji} + p_m \varphi_j + \sigma_{ji} \phi_{mi}) dV. \end{aligned} \quad (6.186)$$

Im statischen Fall ergibt sich die Form [102].

### Versetzungsanteil

Für den Versetzungsanteil  $\mathcal{L}_{ve}$  und die Größen  $P_{ji}^c$ ,  $\mathcal{P}_j^c$  aus den Gleichungen (6.167) und (6.168) bekommt man für die kanonischen Ströme

$$M_{ki}^c := -A_{ki} = \epsilon_{kmj} (x_m P_{ji}^c + D_{ji} \varphi_m - H_{jli} \phi_{ml} - H_{lji} \phi_{lm}), \quad (6.187)$$

$$\mathcal{M}_k^c := A_{k4} = \epsilon_{kmj} (x_m \mathcal{P}_j^c + D_{jl} \phi_{ml} + D_{lj} \phi_{lm}). \quad (6.188)$$

Somit bekommt man für den Versetzungsanteil die folgende Bilanzgleichung

$$\begin{aligned} D_t \mathcal{M}_k^c - D_i M_{ki}^c &= \epsilon_{kmj} (-x_m \mathcal{F}_j^c - \sigma_{ji} \phi_{mi} - \sigma_{ij} \phi_{im} - p_j \dot{u}_m \\ &\quad + D_{ij} I_{im} + D_{ji} I_{mi} - \frac{1}{2} H_{jil} T_{mil} - H_{lij} T_{lim}). \end{aligned} \quad (6.189)$$

### 6.3.3 Skalierungsstrom

#### Elastoplastischer Anteil

Für die Skalierung lauten die kanonischen Ströme für den elastoplastischen Anteil der Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{\text{ep}}$

$$Y_i^c := -A_i = x_j P_{ji}^c - t S_i^c + d_u \sigma_{ji} u_j, \quad (6.190)$$

$$\mathcal{Y}^c := A_4 = x_j \mathcal{P}_j^c - t \mathcal{H}^c + d_u p_j u_j, \quad (6.191)$$

mit den Größen  $P_{ji}^c$ ,  $\mathcal{P}_j^c$ ,  $S_i^c$  und  $\mathcal{H}^c$  aus den Gln. (6.147)–(6.150). Daraus ergibt sich die Bilanz für den Skalierungsstrom

$$\begin{aligned} D_t \mathcal{Y}^c - D_i Y_i^c &= -t \mathcal{W}^c + x_k \mathcal{F}_k^c + \left( d_u + \frac{d-2}{2} \right) p_\alpha \dot{u}_\alpha - \left( d_u + \frac{d-2}{2} \right) \sigma_{\alpha k} u_{\alpha, k} \\ &\quad + \frac{d}{2} p_\alpha \varphi_\alpha - \frac{d}{2} \sigma_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (6.192)$$

Mit der Wahl  $d_u = -\frac{d-2}{2}$  folgt daraus

$$D_t \mathcal{Y}^c - D_i Y_i^c = -t \mathcal{W}^c + x_k \mathcal{F}_k^c + \frac{d}{2} p_\alpha \varphi_\alpha - \frac{d}{2} \sigma_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta}. \quad (6.193)$$

Das wegunabhängige  $M$ -Integral heißt nun

$$M = - \int_V D_t \mathcal{Y}^c dV + \int_S Y_i^c n_i dS = \int_V \left( t \mathcal{W}^c - x_k \mathcal{F}_k^c - \frac{d}{2} p_\alpha \varphi_\alpha + \frac{d}{2} \sigma_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta} \right) dV. \quad (6.194)$$

Auf die gleiche Art und Weise wie bei der Rotation kann die Skalierung auch mit Hilfe von eichinvarianten Größen geschrieben werden. Man substituiert die kanonischen Größen des Pseudoimpulses und Energieimpulstensors nach Gl. (6.180) und Gl. (6.181) durch die entsprechenden eichinvarianten Größen. Zusätzlich drückt man die kanonische Hamiltonsche Funktion  $\mathcal{H}^c$  und den kanonischen Poynting Vektor  $S_i^c$  mit Hilfe folgender Formeln

$$\mathcal{H}^c = \mathcal{H} - p_\alpha \varphi_\alpha, \quad (6.195)$$

$$S_i^c = \sigma_{\alpha i} v_\alpha - \sigma_{\alpha i} \varphi_\alpha \quad (6.196)$$

aus. Wenn die Gln. (6.180), (6.181) und die Gln. (6.195), (6.196) in die kanonische Skalierungsströme (6.190) und (6.191) eingesetzt werden, bekommt man

$$Y_i^c = Y_i + x_j \sigma_{\alpha i} \phi_{\alpha j} + t \sigma_{\alpha i} \varphi_\alpha, \quad (6.197)$$

$$\mathcal{Y}^c = \mathcal{Y} + x_j p_\alpha \phi_{\alpha j} + t p_\alpha \varphi_\alpha, \quad (6.198)$$

mit den neu definierten Strömen

$$Y_i := x_j P_{ji} - t S_i + d_u \sigma_{ji} u_j, \quad (6.199)$$

$$\mathcal{Y} := x_j \mathcal{P}_j - t \mathcal{H} + d_u p_j u_j. \quad (6.200)$$

Aus der lokalen Bilanzgleichung (6.193) bekommt man

$$D_t \mathcal{Y}^c - D_i Y_i^c = D_t \mathcal{Y} - D_i Y_i + D_t (x_j p_\alpha \phi_{\alpha j} + t p_\alpha \varphi_\alpha) - D_i (x_j \sigma_{\alpha i} \phi_{\alpha j} + t \sigma_{\alpha i} \varphi_\alpha). \quad (6.201)$$

Werden die räumlichen und zeitlichen Randterme zu Null gesetzt, so ergibt sich mit  $d_u = -\frac{d-2}{2}$  die lokale Bilanzgleichung

$$D_t \mathcal{Y} - D_i Y_i = -t \mathcal{W} + x_k \mathcal{F}_k + \frac{d-2}{2} p_\alpha \varphi_\alpha - \frac{d-2}{2} \sigma_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta}, \quad (6.202)$$

und somit das in den eichinvarianten Kraft und Arbeitsgrößen formulierte Integral

$$M := - \int_V D_t \mathcal{Y} dV + \int_S Y_i n_i dS = \int_V \left( t \mathcal{W} - x_k \mathcal{F}_k - \frac{d-2}{2} p_\alpha \varphi_\alpha + \frac{d-2}{2} \sigma_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta} \right) dV. \quad (6.203)$$

Für den statischen Fall haben Lazar und Kirchner das  $M$ -Integral in der Arbeit [102] angegeben.

### Versetzungsanteil

Verfährt man bei der Skalierung mit dem Versetzungsanteil der Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{ve}$  nach der gleichen Art und Weise wie für die Translationen und Rotationen, so bekommt man aus den Gln. (6.167)–(6.170) für die kanonischen Ströme

$$Y_i^c := -A_i = x_j P_{ji}^c - t S_i^c + d_\varphi D_{ji} \varphi_j - d_\phi H_{jli} \phi_{jl}, \quad (6.204)$$

$$\mathcal{Y}^c := A_4 = x_j \mathcal{P}_j^c - t \mathcal{H}^c + d_\phi D_{jl} \phi_{jl}. \quad (6.205)$$

Da es für die Variationsymmetrie der Skalierung keine erhaltende Dichte gibt, ist es sinnvoll die Bilanzgleichung für den Versetzungsanteil anzugeben

$$D_t \mathcal{Y}^c - D_i Y_i^c = t \mathcal{W}^c - x_k \mathcal{F}_k^c + d_\varphi p_\alpha \varphi_\alpha - d_\phi \sigma_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta} + \left( d_\phi + \frac{d-2}{2} \right) D_{\alpha\beta} \dot{\phi}_{\alpha\beta} \quad (6.206)$$

$$- \frac{1}{2} \left( d_\phi + \frac{d-2}{2} \right) H_{\alpha\beta k} T_{\alpha\beta k} - \left( d_\varphi + \frac{d-2}{2} \right) D_{\alpha\beta} \varphi_{\alpha,\beta}.$$

Wählt man  $d_\phi = -\frac{d}{2}$  und  $d_\varphi = -\frac{d}{2}$ , so bekommt man folgendes Resultat

$$\begin{aligned} D_t \mathcal{Y}^c - D_i Y_i^c &= t \mathcal{W}^c - x_k \mathcal{F}_k^c - \frac{d}{2} p_\alpha \varphi_\alpha + \frac{d}{2} \sigma_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta} - I_{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} \\ &\quad + \frac{1}{2} H_{\alpha\beta k} T_{\alpha\beta k}. \end{aligned} \quad (6.207)$$

Berücksichtigt man in der Bilanzgleichung (6.207) den Ausdruck (6.20) für die Lagrangedichte, so ergibt sich ihre endgültige Form

$$D_t \mathcal{Y}^c - D_i Y_i^c = t \mathcal{W}^c - x_k \mathcal{F}_k^c - \frac{d}{2} p_\alpha \varphi_\alpha + \frac{d}{2} \sigma_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta} - 2\mathcal{L}_{ve}. \quad (6.208)$$

Werden die Gln. (6.208) und (6.192) zusammenaddiert, dann bekommt man wie erwartet die Bilanzgleichung (6.128) für das gesamte System mit der Lagrangedichte  $\mathcal{L}$ .

### 6.3.4 Eichinvarianz

Für den Strom aus der Eichinvarianz wird ersichtlich, wenn man nur den elastoplastischen Anteil der Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{\text{ep}}$  berücksichtigt, daß für ein konservatives System, welches keinen äußeren Kräften unterworfen wird, der gesamte Impuls erhalten bleiben soll. Mit den folgenden Strömen

$$G_i^c := -A_i = -\sigma_{ji} \tilde{f}_j(t, x), \quad (6.209)$$

$$\mathcal{G}^c := A_4 = -p_j \tilde{f}_j(t, x), \quad (6.210)$$

bekommt man folgende Bilanzgleichung

$$D_t \mathcal{G}^c - D_i G_i^c = -p_j \dot{\tilde{f}}_j + \sigma_{ji} \tilde{f}_{j,i} = (D_t p_j - D_i \sigma_{ji}) \tilde{f}_j + D_i (\sigma_{ji} \tilde{f}_j) + D_t (p_j \tilde{f}_j). \quad (6.211)$$

Integriert man über das ganze raumzeitliche Gebiet und wählt solche  $\tilde{f}_j$  für welche die Divergenzterme auf dem Rand zum Verschwinden gebracht werden, gilt die Impulserhaltung

$$G^c(t) - G^c(t_0) = \int_V \int_t (D_t p_j - D_i \sigma_{ji}) \tilde{f}_j dt dV = 0, \quad (6.212)$$

nur dann, wenn die lokale Impulsbilanz (6.22) erfüllt ist.

## 6.4 Statische Lösungen

Es wird gezeigt, ob die im letzten Abschnitt vorgestellte Eichtheorie der Versetzungen, physikalisch sinnvolle Lösungen im Gebiet nahe des Versetzungskernes liefert, also solche, die kein singuläres Verhalten auf der Versetzungslinie aufweisen. Gleichzeitig sollen die Lösungen des Fernfeldes für asymmetrische Spannungen verallgemeinert werden. Die Euler-Lagrange Gln. (6.50)–(6.52), die im letzten Kapitel hergeleitet worden sind, berücksichtigen nicht die Fernfelder der Distorsionen und Spannungen. Da aber die Theorie auch die Fernfelder für das klassische Verhalten reproduzieren sollte, muß (6.22) zu diesem Zweck modifiziert werden. Die Lösung soll sich fern vom Gebiet des Versetzungskernes asymptotisch dem klassischen Fernfeld anpassen. Diese Randbedingung kann durch Addition einer sogenannten Null-Lagrangian  $\mathcal{L}_N$

$$\mathcal{L}_N = \sigma_{ij}^0 \beta_{ij} - p_i^0 v_i, \quad (6.213)$$

zur Lagrangedichte (6.21) erreicht werden [117]. Die gesamte Lagrangedichte lautet jetzt

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{ep}} + \mathcal{L}_{\text{ve}} + \mathcal{L}_N \quad (6.214)$$

und die modifizierten Euler-Lagrange Gln. heißen

$$D_t p_i - D_j \sigma_{ij} = 0, \quad (6.215)$$

$$D_j D_{ij} + p_i = p_i^0, \quad (6.216)$$

$$D_t D_{ij} + D_k H_{ijk} + \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0. \quad (6.217)$$



Als Randbedingungen für das Gleichungssystem (6.215)–(6.217) der Eichfeldtheorie der Versetzungen gelten also die klassischen Lösungen  $p_i^0, \sigma_{ij}^0$  für die Fernfelder. Im statischen Fall vereinfachen sich die Euler-Lagrange Gln. (6.215)–(6.217) zu

$$D_j \sigma_{ij} = 0, \quad (6.218)$$

$$D_k H_{ijk} + \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0. \quad (6.219)$$

Ausgedrückt in den kinematischen Größen  $u_i$  und  $\phi_{ij}$  lauten diese

$$\lambda \delta_{ij} (u_{k,kj} + \phi_{kk,j}) + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ji} + \phi_{ij,j} + \phi_{ji,j}) + \gamma (u_{i,jj} - u_{j,ij} + \phi_{ij,j} - \phi_{ji,j}) = 0, \quad (6.220)$$

$$\begin{aligned} c_1 (\phi_{ik,jk} - \phi_{ij,kk}) + c_2 (\phi_{ji,kk} - \phi_{jk,ik} + \phi_{kj,ik} - \phi_{ki,jk}) + c_3 [\delta_{ij} (\phi_{lk,lk} - \phi_{ll,kk}) \\ + (\phi_{ll,ji} - \phi_{lj,li})] + \lambda \delta_{ij} (u_{l,l} + \phi_{ll}) + \mu (u_{i,j} + u_{j,i} + \phi_{ij} + \phi_{ji}) \\ + \gamma (u_{i,j} - u_{j,i} + \phi_{ij} - \phi_{ji}) = \sigma_{ij}^0. \end{aligned} \quad (6.221)$$

Wir schreiben diese in die eichinvarianten Distorsionsfelder

$$\lambda \delta_{ij} \beta_{kk,j} + (\mu + \gamma) \beta_{ij,j} + (\mu + \gamma) \beta_{ji,i} = 0, \quad (6.222)$$

$$\begin{aligned} c_1 (\beta_{ik,jk} - \beta_{ij,kk}) + c_2 (\beta_{ji,kk} - \beta_{jk,ki} + \beta_{kj,ki} - \beta_{ki,kj}) \\ + c_3 [\delta_{ij} (\beta_{lk,kl} - \beta_{ll,kk}) + (\beta_{ll,ji} - \beta_{lj,li})] + \lambda \delta_{ij} \beta_{ll} \\ + (\mu + \gamma) \beta_{ij} + (\mu - \gamma) \beta_{ji} = \sigma_{ij}^0, \end{aligned} \quad (6.223)$$

um. Die Euler-Lagrange Gln. (6.218)–(6.219) können mittels des inversen Materialgesetzes vollständig in den Spannungen  $\sigma_{ij}$  ausgedrückt werden. Dabei geht man folgendermaßen vor. Als erstes verjüngt man das Materialgesetz zwischen Spannungen und Distorsionen mit dem Kronecker Symbol  $\delta_{ij}$ . Dies liefert eine Beziehung für die Spur  $\sigma_{kk}$  des Spannungstensors

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu) \beta_{kk}. \quad (6.224)$$

Als nächstes wird der Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  in seine symmetrische und antisymmetrische Teile zerlegt

$$\sigma_{(ij)} = \lambda \delta_{ij} \beta_{kk} + 2\mu \beta_{(ij)}, \quad \sigma_{[ij]} = 2\gamma \beta_{[ij]}, \quad (6.225)$$

Der symmetrische Anteil wird mit  $\gamma$  und der antisymmetrische mit  $\mu$  multipliziert und anschließend zusammenaddiert

$$\gamma \sigma_{(ij)} + \mu \sigma_{[ij]} = \frac{\gamma \nu}{1 + \nu} \delta_{ij} \sigma_{kk} + 2\mu \gamma \beta_{ij}, \quad (6.226)$$

wobei  $\nu$  die Poissonsche Querkontraktionszahl (2.39) darstellt. Umgeformt nach dem Distorsionstensor  $\beta_{ij}$  ergibt sich

$$\beta_{ij} = \frac{\gamma + \mu}{4\mu\gamma} \sigma_{ij} + \frac{\gamma - \mu}{4\mu\gamma} \sigma_{ji} - \frac{\nu}{2\mu(1 + \nu)} \delta_{ij} \sigma_{kk}, \quad (6.227)$$

Die Hyperspannungen  $H_{ijk}$ , ausgedrückt mit Hilfe der Distorsionen, lauten

$$H_{ijk} = c_1(\beta_{ik,j} - \beta_{ij,k}) + c_2(\beta_{ji,k} - \beta_{jk,i} + \beta_{kj,i} - \beta_{ki,j}) \\ + c_3[\delta_{ij}(\beta_{lk,l} - \beta_{ll,k}) + \delta_{ik}(\beta_{ll,j} - \beta_{lj,l})]. \quad (6.228)$$

Jetzt ist es möglich die Bilanzgleichung für  $H_{ijk}$  unter Benutzung des inversen Materialgesetzes (6.227) und Gl. (6.228) nur als Funktion der Spannungen  $\sigma_{ij}$  auszudrücken. Sie besitzt die Form

$$\left[ (c_1 - c_2 + 2c_3) \frac{2\gamma\nu}{1+\nu} - 2c_3\gamma \right] (\delta_{ij} \sigma_{ll,kk} - \sigma_{ll,ij}) + 2c_3\gamma \delta_{ij} \sigma_{lk,kl} \\ + \left[ c_2(\gamma - \mu) - c_1(\gamma + \mu) \right] (\sigma_{ij,kk} - \sigma_{ik,kj}) + \left[ c_2(\gamma + \mu) - c_1(\gamma - \mu) \right] (\sigma_{ji,kk} - \sigma_{ki,kj}) \\ + \left[ 2c_2\mu - c_3(\gamma + \mu) \right] \sigma_{kj,ki} - \left[ 2c_2\mu + c_3(\gamma - \mu) \right] \sigma_{jk,ki} + 4\mu\gamma \sigma_{ij} = 4\mu\gamma \sigma_{ij}^0. \quad (6.229)$$

Unter Berücksichtigung des Kräftegleichgewichts  $\sigma_{ij,j} = 0$  bekommt sie die folgende Gestalt

$$\left[ (c_1 - c_2 + 2c_3) \frac{2\gamma\nu}{1+\nu} - 2c_3\gamma \right] (\delta_{ij} \sigma_{ll,kk} - \sigma_{ll,ij}) + \left[ c_2(\gamma - \mu) - c_1(\gamma + \mu) \right] \sigma_{ij,kk} \\ + \left[ c_2(\gamma + \mu) - c_1(\gamma - \mu) \right] (\sigma_{ji,kk} - \sigma_{ki,kj}) + \left[ 2c_2\mu - c_3(\gamma + \mu) \right] \sigma_{kj,ki} + 4\mu\gamma \sigma_{ij} = 4\mu\gamma \sigma_{ij}^0. \quad (6.230)$$

### 6.4.1 Schraubenversetzung

Wir behandeln das Problem einer einzelnen geraden Schraubenversetzung mit der Versetzungslinie parallel zur  $z$ -Achse. Es handelt sich um einen anti-ebenen Verzerrungszustand (‘‘anti-plane strain’’) mit den kinematischen Zustangsgrößen

$$\beta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{z\phi} & 0 \\ \beta_{zx} & \beta_{zy} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{zz} \end{pmatrix}. \quad (6.231)$$

Eine ausführliche Behandlung dieses Problems nach der klassischen Elastizitätstheorie findet man bei deWit [122]. Es handelt sich hierbei um den Verzerrungszustand einer Versetzungslinie in einem unendlich ausgedehnten, isotropen Medium. Aus dieser Theorie erhält man für die elastische Distorsion

$$\beta_{zx}^0 = -\frac{b}{2\pi} \frac{y}{r^2}, \quad \beta_{zy}^0 = \frac{b}{2\pi} \frac{x}{r^2}. \quad (6.232)$$

Die dazu gehörenden symmetrischen Spannungsfelder lauten

$$\sigma_{zx}^0 = -\frac{\mu b}{2\pi} \frac{y}{r^2}, \quad \sigma_{zy}^0 = \frac{\mu b}{2\pi} \frac{x}{r^2}. \quad (6.233)$$

Diese Lösungen zeigen auf der Versetzungslinie  $r \rightarrow 0$  ein singuläres Verhalten und beschreiben deswegen eine unphysikalische Situation in der Nähe des Versetzungskernes.

Aus dem Kräfte und Hyperspannungsgleichgewicht (6.222)–(6.223) folgt eine Relation zwischen den Distorsionskomponenten

$$\beta_{zx,x} + \beta_{zy,y} = 0 \quad (6.234)$$

und vier weitere Gleichungen für  $\beta_{zx}, \beta_{zy}$

$$\left[1 + \frac{c_2}{\mu - \gamma} \Delta\right] \beta_{zx} = \beta_{zx}^0, \quad (6.235)$$

$$\left[1 - \frac{c_1}{\mu + \gamma} \Delta\right] \beta_{zx} = \beta_{zx}^0, \quad (6.236)$$

$$\left[1 + \frac{c_2}{\mu - \gamma} \Delta\right] \beta_{zy} = \beta_{zy}^0, \quad (6.237)$$

$$\left[1 - \frac{c_1}{\mu + \gamma} \Delta\right] \beta_{zy} = \beta_{zy}^0. \quad (6.238)$$

Dies ist ein überbestimmtes System für die zwei unbekannten Distorsionskomponenten  $\beta_{zx}$  und  $\beta_{zy}$ . Multipliziert man die erste Gleichung mit dem Faktor  $c_1 \frac{\mu - \gamma}{\mu + \gamma}$  und die zweite mit  $c_2$  und addiert sie anschließend zusammen, so bekommt man folgende algebraische Gleichung

$$\left[c_1 \frac{\mu - \gamma}{\mu + \gamma} + c_2\right] (\beta_{zx} - \beta_{zx}^0) = 0. \quad (6.239)$$

Da im allgemeinen eine Lösung  $\beta_{zx} \neq \beta_{zx}^0$  gesucht wird, folgt

$$c_2 = -\frac{\mu - \gamma}{\mu + \gamma} c_1, \quad (6.240)$$

welche eine Beziehung zwischen den beiden Materialparameter  $c_1, c_2$  darstellt. Ausgedrückt in den irreduziblen Parametern (6.44) lautet diese

$$a_3 = \frac{3\gamma - \mu}{2\mu} a_1. \quad (6.241)$$

Wird der Parameter  $c_2$  zu Null gesetzt, fordert (6.240), daß auch  $c_1 = 0$  wird. Aus der Gl. (6.241) sieht man, daß wenn  $a_3 = 0$  auch  $a_1 = 0$  für beliebige Materialparameter  $\gamma$  und  $\mu$  sein muß. Dies hat zur Folge, daß aus den Gleichungen (6.235)–(6.236) sowie (6.237)–(6.238) sich die triviale Lösung  $\beta_{zx} = \beta_{zx}^0, \beta_{zy} = \beta_{zy}^0$  ergibt. Somit erzwingt die Beziehung (6.240), daß das Materialgesetz (6.30) für die Hyperspannungen einer Schraubenversetzung zwei Materialparameter  $c_1 \neq 0$  und  $c_2 \neq 0$  haben muß. Die Energiebedingung (6.49) verlangt, daß beide  $a_1 \geq 0$  und  $a_3 \geq 0$  sind. Daraus folgt aus Gl. (6.241) die zusätzliche Bedingung für den Materialparameter  $\gamma$

$$\gamma \geq \frac{\mu}{3}. \quad (6.242)$$

Mit der Bedingung (6.240) und wenn die gleiche Operationen wie oben für die dritte und vierte Gleichung ausgeführt werden, ergeben sich die folgenden zwei Bestimmungsgleichungen

$$[1 - \ell_1^2 \Delta] \beta_{zx} = \beta_{zx}^0, \quad (6.243)$$

$$[1 - \ell_1^2 \Delta] \beta_{zy} = \beta_{zy}^0, \quad (6.244)$$

welche zwei inhomogene Helmholtz Gleichungen für die beiden Distorsionsfelder  $\beta_{zx}, \beta_{zy}$  sind. Im Rahmen der Eichtheorie erhalten wir eine eigene, innere charakteristische Länge  $\ell_1$  für das anti-ebene “anti-plane-strain” Problem. Sie ist gegeben durch

$$\ell_1^2 = \frac{c_1}{\mu + \gamma} = \frac{a_1}{2\mu}. \quad (6.245)$$

Obwohl  $\gamma \neq 0$ , ergibt sich aus (6.245) die gleiche innere Länge wie in der Eichtheorie für eine Schraubenversetzung mit symmetrischen Spannungen, (siehe [9]). Die Asymmetrie der Spannungen verändert somit nicht die innere charakteristische Länge für die Schraubenversetzung. Aus der Lösung der Gleichungen (6.243)–(6.244) bekommt man die entsprechenden Distorsionskomponenten  $\beta_{zx}, \beta_{zy}$

$$\beta_{zx} = -\frac{b}{2\pi} \frac{y}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right], \quad (6.246)$$

$$\beta_{zy} = \frac{b}{2\pi} \frac{x}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right]. \quad (6.247)$$

In den Lösungen erscheint die Funktion  $K_1$ . Diese ist die modifizierte Bessel Funktion zweiter Art und erster Ordnung (siehe Anhang, Gl. (A.24)). Aus den Distorsionskomponenten (6.246) und (6.247) folgen auch die Komponenten des axialen Drehvektors  $\omega_i$  für die Schraubenversetzung

$$\omega_x = \frac{b}{4\pi} \frac{x}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right], \quad (6.248)$$

$$\omega_y = \frac{b}{4\pi} \frac{y}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right]. \quad (6.249)$$

Aus den Gln. (6.248) und (6.249) lassen sich nach Gl. (5.21) die Komponenten des deWitschen Verkrümmungstensors angeben [123]

$$K_{xx}^\omega = \frac{b}{4\pi} \frac{y^2 - x^2}{r^4} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) + \frac{x^2}{y^2 - x^2} \frac{r^2}{\ell_1^2} K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right], \quad (6.250)$$

$$K_{xy}^\omega = K_{yx}^\omega = -\frac{b}{2\pi} \frac{xy}{r^4} \left[ \left( 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right) - \frac{r^2}{2\ell_1^2} K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right], \quad (6.251)$$

$$K_{yy}^\omega = \frac{b}{4\pi} \frac{x^2 - y^2}{r^4} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) + \frac{y^2}{x^2 - y^2} \frac{r^2}{\ell_1^2} K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right], \quad (6.252)$$

$$K_{kk}^\omega = \frac{1}{2} \alpha_{zz}. \quad (6.253)$$

In diesen Komponenten kommt zusätzlich zu der Funktion  $K_1$  die modifizierte Bessel Funktion zweiter Art und nullter Ordnung  $K_0$  hinzu (siehe Anhang, Gl. (A.23)). Aus den Distorsionen (6.246) und (6.247) und der Gl. (5.18) ergibt sich die Komponente  $\alpha_{zz}$  des Versetzungsdichtetensors bzw. der Torsion als

$$T_{zxy} = \alpha_{zz} = \frac{b}{2\pi\ell_1^2} K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right). \quad (6.254)$$

Aus dem konstitutiven Gesetz (6.30) können die Hyperspannungen

$$H_{zz} = H_{zxy} = c_1 T_{zxy} = \frac{(\mu + \gamma)b}{2\pi} K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right), \quad (6.255)$$

$$H_{yy} = H_{yzx} = c_2 T_{zxy} = -\frac{(\mu - \gamma)b}{2\pi} K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right), \quad (6.256)$$

$$H_{xx} = H_{xyz} = c_2 T_{zxy} = -\frac{(\mu - \gamma)b}{2\pi} K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right), \quad (6.257)$$

berechnet werden. Die Torsionskomponente  $T_{zxy}$  und damit auch die Momentenspannungskomponenten  $H_{zxy}$ ,  $H_{yzx}$ ,  $H_{xzy}$  besitzen für  $r \rightarrow 0$  eine logarithmische Singularität. Im Gegensatz dazu, sieht man für die Distorsionsfelder, die sich aus der Eichfeldtheorie ergaben, daß die klassischen Lösungen mit dem Klammerausdruck  $[1 - r/\ell_1 K_1(r/\ell_1)]$  multipliziert werden. Dieser sorgt dafür, daß das singuläre Verhalten auf der Versetzungslinie für  $r \rightarrow 0$  beseitigt wird (siehe Anhang, Gl. (A.24)). Für die Spur von  $H_{ij}$  bekommt man für die Schraubenversetzung

$$H_{kk} = -\frac{(\mu - 3\gamma)b}{2\pi} K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right). \quad (6.258)$$

Die Hyperspannungen (6.255)–(6.258) gehen in wachsender Entfernung von der Versetzungslinie für  $r \rightarrow \infty$  exponentiell gegen Null. Andererseits sieht man aus den Gln. (6.250)–(6.252), daß die Verkrümmungskomponenten langreichweitige Momentenspannungen hervorrufen, da sie proportional zu  $1/r^2$  abfallen.

Bevor wir das Ergebnis für die Spannungen angeben, möchten wir zeigen, wie man die Lösung mit Hilfe eines Spannungsfunktionsansatzes bekommen kann. Aus der Beziehung (6.230) können vier Gleichungen für die Komponenten  $\sigma_{zy}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zx}$ ,  $\sigma_{xz}$  der Schraubenversetzung aufgestellt werden

$$\begin{aligned} [c_2(\gamma + \mu) - c_1(\gamma - \mu)] (\sigma_{yz,xx} - \sigma_{xz,xy}) + [c_2(\gamma - \mu) - c_1(\gamma + \mu)] \Delta\sigma_{zy} \\ + 4\mu\gamma\sigma_{zy} = 4\mu\gamma\sigma_{zy}^0, \end{aligned} \quad (6.259)$$

$$\begin{aligned} [c_2(\gamma + \mu) - c_1(\gamma - \mu)] \Delta\sigma_{zy} + [c_2(\gamma - \mu) - c_1(\gamma + \mu)] \Delta\sigma_{yz} \\ + [2c_2\mu - c_3(\gamma + \mu)] (\sigma_{xz,xy} + \sigma_{yz,yy}) + 4\mu\gamma\sigma_{yz} = 4\mu\gamma\sigma_{yz}^0, \end{aligned} \quad (6.260)$$

$$\begin{aligned} [c_2(\gamma + \mu) - c_1(\gamma - \mu)] (\sigma_{xz,yy} - \sigma_{yz,xy}) + [c_2(\gamma - \mu) - c_1(\gamma + \mu)] \Delta\sigma_{zx} \\ + 4\mu\gamma\sigma_{zx} = 4\mu\gamma\sigma_{zx}^0, \end{aligned} \quad (6.261)$$

$$\begin{aligned} [c_2(\gamma + \mu) - c_1(\gamma - \mu)] \Delta\sigma_{zx} + [c_2(\gamma - \mu) - c_1(\gamma + \mu)] \Delta\sigma_{xz} \\ + [2c_2\mu - c_3(\gamma + \mu)] (\sigma_{xz,xx} + \sigma_{yz,xy}) + 4\mu\gamma\sigma_{xz} = 4\mu\gamma\sigma_{xz}^0. \end{aligned} \quad (6.262)$$

Für dieses Gleichungssystem wird folgender, geeigneter Spannungsfunktionsansatz

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\mu-\gamma}{\mu+\gamma} \partial_y F \\ 0 & 0 & \frac{\mu-\gamma}{\mu+\gamma} \partial_x F \\ -\partial_y F & \partial_x F & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.263)$$

gewählt. Damit können die vier Gleichungen für die Spannungskomponenten  $\sigma_{zy}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zx}$ ,  $\sigma_{xz}$  in nur eine für die Spannungsfunktion  $F$  zurückgeführt werden. Obiger Ansatz erfüllt das Kräftegleichgewicht  $\sigma_{ij,j} = 0$  identisch. Mit diesem Ansatz und unter Berücksichtigung der Beziehung (6.240) zwischen den beiden Materialparametern  $c_2$  und  $c_1$  ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ [1 - \ell_1^2 \Delta] F - F^0 \right\} = 0, \quad (6.264)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ [1 - \ell_1^2 \Delta] F - F^0 \right\} = 0, \quad (6.265)$$

welche notwendigerweise auf die folgende Gleichung für die Spannungsfunktion  $F$  führen

$$[1 - \ell_1^2 \Delta] F = F^0. \quad (6.266)$$

Diese ist eine inhomogene Helmholtz-Gleichung für die unbekannte Spannungsfunktion  $F$ . Die rechte Seite  $F^0$  berechnet man mit Hilfe der inkompatiblen, klassischen Elastizitätstheorie. Die schon eingeführte Inkompatibilitätsbedingung (5.18) lautet für die einzige Komponente  $\alpha_{zz}^0$  des Versetzungsdichtetensors im Fall einer Schraubenversetzung

$$\alpha_{zz}^0 = \beta_{zy,x}^0 - \beta_{zx,y}^0. \quad (6.267)$$

Aus dem inversen Materialgesetz (6.227) schreibt sich obige Inkompatibilitätsbedingung mit Hilfe der Spannungen

$$\alpha_{zz}^0 = \frac{1}{\mu + \gamma} (\sigma_{zy,x}^0 - \sigma_{zx,y}^0). \quad (6.268)$$

Für eine Schraubenversetzung der Betragsstärke  $b$ , deren Burgersvektor  $\mathbf{b}$  in  $z$ -Richtung zeigt, gilt

$$\alpha_{zz}^0 = b \delta(x) \delta(y). \quad (6.269)$$

Mit dem angegebenen Spannungsfunktionsansatz für die Funktion  $F^0$  anstatt  $F$  und (6.269) bekommt man schließlich folgende inhomogene Laplace-Gleichung

$$\Delta F^0 = (\mu + \gamma) b \delta(x) \delta(y). \quad (6.270)$$

Diese besitzt die folgende zweidimensionale Greensche Funktion

$$F^0 = \frac{(\mu + \gamma) b}{2\pi} \ln r. \quad (6.271)$$

Daraus ergeben sich für die modifizierten klassischen Spannungskomponenten  $\sigma_{xz}^0, \sigma_{zx}^0$ ,

$\sigma_{yz}^0, \sigma_{zy}^0$  folgende Ausdrücke

$$\sigma_{xz}^0 = -\frac{(\mu - \gamma)b}{2\pi} \frac{y}{r^2}, \quad (6.272)$$

$$\sigma_{zx}^0 = -\frac{(\mu + \gamma)b}{2\pi} \frac{y}{r^2}, \quad (6.273)$$

$$\sigma_{yz}^0 = \frac{(\mu - \gamma)b}{2\pi} \frac{x}{r^2}, \quad (6.274)$$

$$\sigma_{zy}^0 = \frac{(\mu + \gamma)b}{2\pi} \frac{x}{r^2}. \quad (6.275)$$

Aufgrund der allgemeineren Wahl von asymmetrischen Spannungen im konstitutiven Gesetz, wurde die klassische Lösung (6.233) modifiziert. Die entsprechenden Distorsionskomponenten  $\beta_{zx}, \beta_{zy}$  besitzen die gleiche Form wie (6.232). Mit dem bekannten  $F^0$  erhalten wir aus Gl. (6.266)

$$[1 - \ell_1^2 \Delta] F = \frac{(\mu + \gamma)b}{2\pi} \ln r. \quad (6.276)$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$F = \frac{(\mu + \gamma)b}{2\pi} \left[ \ln r + K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right]. \quad (6.277)$$

Mit diesem Ergebnis für  $F$  folgen die Spannungskomponenten

$$\sigma_{xz} = -\frac{(\mu - \gamma)b}{2\pi} \frac{y}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right], \quad (6.278)$$

$$\sigma_{zx} = -\frac{(\mu + \gamma)b}{2\pi} \frac{y}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right], \quad (6.279)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{(\mu - \gamma)b}{2\pi} \frac{x}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right], \quad (6.280)$$

$$\sigma_{zy} = \frac{(\mu + \gamma)b}{2\pi} \frac{x}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right]. \quad (6.281)$$

Da bei einer geraden Schraubenversetzung, die Versetzungslinienrichtung und der Burgersvektor parallel zueinander liegen, besitzt das Problem Zylindersymmetrie. Der Spannungsfunktionsansatz in Zylinderkoordinaten ist gegeben durch

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\mu - \gamma}{\mu + \gamma} \frac{1}{r} \partial_\phi F \\ 0 & 0 & \frac{\mu - \gamma}{\mu + \gamma} \partial_r F \\ -\frac{1}{r} \partial_\phi F & \partial_r F & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.282)$$

Für die Schraubenversetzung gilt  $F(r, \phi) = F(r)$  und somit gibt es die Spannungskom-

ponenten  $\sigma_{z\phi}$ ,  $\sigma_{\phi z}$  und die Distorsionskomponente  $\beta_{z\phi}$

$$\sigma_{z\phi} = \frac{(\mu + \gamma)b}{2\pi} \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1 \left( \frac{r}{\ell_1} \right) \right], \quad (6.283)$$

$$\sigma_{\phi z} = \frac{(\mu - \gamma)b}{2\pi} \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1 \left( \frac{r}{\ell_1} \right) \right], \quad (6.284)$$

$$\beta_{z\phi} = \frac{b}{2\pi} \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1 \left( \frac{r}{\ell_1} \right) \right]. \quad (6.285)$$

Genau wie bei den Distorsionen werden die klassischen Lösungen für asymmetrische Spannungen mit dem Klammerausdruck  $[1 - r/\ell_1 K_1(r/\ell_1)]$  multipliziert, der das singuläre Verhalten auf der Versetzungslinie  $r = 0$  beseitigt (siehe Abb. 6.1). Der Burgersvektor läßt sich aus der Komponente  $\alpha_{zz}$  des Versetzungsdichtetensors durch folgende Integration in Polarkoordinaten gewinnen

$$b(r) = \oint_0^{2\pi} \beta_{z\phi} r d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^r \alpha_{zz}(r') r' dr' d\phi = b \left[ 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1 \left( \frac{r}{\ell_1} \right) \right]. \quad (6.286)$$

Im Gegensatz zur inkompatiblen Elastizität ist in der Eichfeldtheorie der Burgersvektor  $b(r)$  nicht mehr im Ursprung lokalisiert, sondern stellt eine um den Versetzungskern ausgeschmierte Funktion dar. Er ist für eine Schraubenversetzung eine ansteigende Funktion vom Abstand  $r$  von der Versetzungslinie. Diese Funktion strebt für große Entfernungen  $r \rightarrow \infty$  dem bekannten asymptotischen Wert  $b$  von der klassischen Elastizität an. Dieser effektive Burgersvektor  $b(r)$  steigt im Gebiet  $0 \leq r \leq 6\ell_1$  von  $b(0) = 0$  bis zum Wert  $b(6\ell_1) = 0.992$  an. Aus den Gleichungen (6.283) und (6.284) sieht man daß  $\sigma_{z\phi} \geq \sigma_{\phi z}$  aus der vorhandenen Asymmetrie des Spannungstensors resultiert. Die Spannungsverläufe dieser Komponenten werden im Kernbereich bis zum Kernradius  $r = r_{\text{ke}}$  modifiziert und nehmen für  $r \geq r_{\text{ke}}$  mit  $r^{-1}$  ab. Die Eigenspannungen  $\sigma_{z\phi}$ ,  $\sigma_{\phi z}$  nehmen ihr Maximum an der Stelle  $r \simeq 1.1\ell_1$  an

$$\sigma_{z\phi}^{\text{max}} = 0.4 \frac{(\mu + \gamma)b}{2\pi\ell_1}, \quad (6.287)$$

$$\sigma_{\phi z}^{\text{max}} = 0.4 \frac{(\mu - \gamma)b}{2\pi\ell_1}. \quad (6.288)$$

Im Falle symmetrischer Spannungen für  $\gamma = 0$ , (siehe [9]), ergibt sich die symmetrische Spannung  $\sigma_{\phi z} = \sigma_{z\phi}$

$$\sigma_{z\phi} = \frac{\mu b}{2\pi r} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1 \left( \frac{r}{\ell_1} \right) \right]. \quad (6.289)$$

Wir möchten uns nun mit dem Problem der Kräfteberechnung zwischen zwei parallelen Schraubenversetzungen befassen. Im Abschnitt 6.3.1 wurde die Formel für die Peach-Koehler Kraft hergeleitet. Für den statischen Fall bekommt man

$$F_j^{\text{PK}} = -F_j = -\sigma_{ki} * T_{kij} = -\epsilon_{ijl} \sigma_{ki} * \alpha_{kl}, \quad (6.290)$$



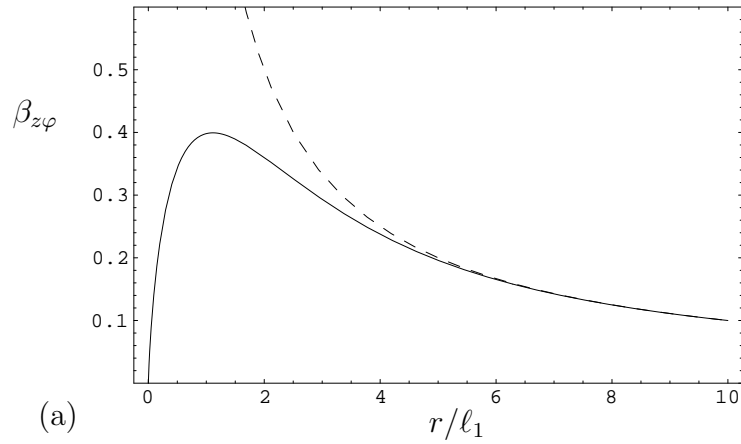


Abbildung 6.1: Die Komponente  $\beta_{z\phi}$  gegeben in Einheiten von  $b/(2\pi\ell_1)$ . Die gestrichelte Kurve stellt die Distorsionskomponente aus der klassischen Elastizität dar.

woraus folgende Zentralkraft  $F_r^{\text{PK}}$  für die Schraubenversetzung ergibt

$$F_r^{\text{PK}} = \sigma_{z\phi} * \alpha_{zz}, \quad (6.291)$$

dabei bezeichnet die Operation  $*$  die räumliche Faltung. Ein Versuch die Kraft zwischen zwei Schraubenversetzungen mit dem Konzept der Faltung innerhalb der Eichtheorie für symmetrische Spannungen auszurechnen, findet man in der Arbeit [11]. Mit der Faltung (6.291) kann die Kraftwechselwirkung zwischen zwei Versetzungen als Funktion des Abstandes  $r$  berechnet werden. Man stellt sich dabei zwei parallele Versetzungen vor, die eine befindet sich im Koordinatenursprung  $r = 0$  und hat den Burgersvektor  $\mathbf{b}$  und die andere im Abstand  $r = R$  und hat den Burgersvektor  $\mathbf{b}'$ . Die Peach-Koehler Kraft an der Stelle  $r = R$  ergibt sich aus folgendem Faltungsintegral

$$\mathbf{F}^{\text{PK}}(R) = \int \sigma_{z\phi}(r) \alpha_{zz}(R-r) \mathbf{e}_r d\mathbf{r}. \quad (6.292)$$

Dabei zeigt der Einheitvektor  $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$  in die Richtung des veränderlichen Ortsvektors  $\mathbf{r}$ . Die Integranden lauten

$$\sigma_{z\phi} \mathbf{e}_r = \frac{(\mu + \gamma)b}{2\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right], \quad (6.293)$$

$$\alpha_{zz} = \frac{b'}{2\pi\ell_1^2} K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right). \quad (6.294)$$

Man definiert die folgenden Funktionen

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) := \nabla \left[ \ln r + K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right], \quad (6.295)$$

$$g(r) := K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right), \quad (6.296)$$

mit dem Gradienten

$$\nabla := \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (6.297)$$

entlang des Einheitvektors. Aus dem Faltungstheorem folgt für die Fourier-Transformierte der Peach-Koehler Kraft

$$\tilde{\mathbf{F}}^{\text{PK}}(\mathbf{q}) = \frac{bb'}{4\pi^2} \frac{(\mu + \gamma)}{\ell_1^2} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) \tilde{g}(q). \quad (6.298)$$

Die Funktion  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q})$  ergibt sich aus folgender Transformation

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) &= \int \nabla \left[ \ln r + K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right] e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &= -i\mathbf{q} \int_0^\infty \left[ \ln r + K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right] r dr \int_0^{2\pi} e^{iqr \cos(\phi-\chi)} d\phi. \end{aligned} \quad (6.299)$$

Die in der oberen, ausgeführten partiellen Integration entstehende Randterme verschwinden für ein unendliches Gebiet. Die Integration über die Winkelvariable führt auf die Beziehung

$$J_0(qr) = \int_0^{2\pi} e^{iqr \cos \zeta} d\zeta, \quad \zeta = \phi - \chi, \quad (6.300)$$

welche die Darstellung der Bessel-Funktion erster Art und nullter Ordnung darstellt. Bei der ausgeführten partiellen Integration in der Transformation (6.299) wurden die Randterme zu Null gesetzt. Damit ergibt sich für die Integration aus der Gl. (6.299)

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) = -i\mathbf{q} \int_0^\infty \left[ \ln r + K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right] J_0(qr) r dr. \quad (6.301)$$

Ähnlich liefert die Transformation für die Funktion  $\tilde{g}(q)$  das Integral

$$\tilde{g}(q) = \int_0^\infty K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right) J_0(qr) r dr. \quad (6.302)$$

Die Integralausdrücke in den Gln. (6.301) und (6.302) kommen bei der zweidimensionalen Fourier-Transformation von zylindersymmetrischen Funktionen  $h(r, \phi) = h(r)$  vor. Diese Transformation heißt Hankel-Transformation nullter Ordnung. Die Hankel-Transformation und ihre Inverse sind durch

$$\tilde{h}(q) = \int_0^\infty h(r) J_0(qr) r dr, \quad (6.303)$$

$$h(r) = \int_0^\infty \tilde{h}(q) J_0(qr) q dq, \quad (6.304)$$

gegeben. Die Hankel-Transformierten von  $\ln(r)$  und  $K_0(r/\ell_1)$  lauten [127]

$$\mathcal{H}\left[K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right)\right] = \frac{1}{q^2 + \frac{1}{\ell_1^2}}, \quad (6.305)$$

$$\mathcal{H}\left[\ln r\right] = -\frac{1}{q^2}. \quad (6.306)$$

Somit bekommt man aus den Gln. (6.301) und (6.302)

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{i}\mathbf{q}}{\ell_1^2} \frac{1}{q^2 \left(q^2 + \frac{1}{\ell_1^2}\right)}, \quad (6.307)$$

$$\tilde{g}(q) = \frac{1}{q^2 + \frac{1}{\ell_1^2}}. \quad (6.308)$$

Die Fourier-Transformierte der Peach-Koehler Kraft lautet jetzt

$$\tilde{\mathbf{F}}^{\text{PK}}(\mathbf{q}) = \frac{bb'(\mu + \gamma)}{4\pi^2 \ell_1^4} \frac{\mathbf{i}\mathbf{q}}{q^2 \left(q^2 + \frac{1}{\ell_1^2}\right)^2}. \quad (6.309)$$

Mit Hilfe der Rücktransformation bekommt man für die Peach-Koehler Kraft an der Stelle  $r = R$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\text{PK}}(R) &= \frac{bb'(\mu + \gamma)}{2\pi} \mathcal{F}^{-1} \left[ -\mathbf{i}\mathbf{q} \mathcal{H}^{-1} \left[ \left( -\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2 + \frac{1}{\ell_1^2}} + \frac{1}{(q^2 + \frac{1}{\ell_1^2})^2 \ell_1^2} \right) \right] \right] \\ &= \frac{bb'(\mu + \gamma)}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \ln r + K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right) + \frac{1}{2} \frac{r}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right] \mathbf{e}_r \Big|_{r=R} \\ &= \frac{bb'(\mu + \gamma)}{2\pi R} \left[ 1 - \frac{R}{\ell_1} K_1\left(\frac{R}{\ell_1}\right) - \frac{1}{2} \frac{R^2}{\ell_1^2} K_0\left(\frac{R}{\ell_1}\right) \right] \mathbf{e}_R. \end{aligned} \quad (6.310)$$

Die Abb. 6.2 zeigt den Verlauf der dimensionslosen Kraft

$$\tilde{F}^{\text{PK}} = \frac{2\pi \ell_1 F^{\text{PK}}(r)}{bb'(\mu + \gamma)} \quad (6.311)$$

in Abhängigkeit von der dimensionlosen Abstandskoordinate  $r/\ell_1$  von der Versetzungslinie. Man wählt  $\gamma = 0$ , um die Peach-Koehler Kraft mit der Kraft aus den anderen Theorien zu vergleichen. Die grob gestrichelte Kurve in der Abb. 6.2 stellt die Kraft in der klassischen Elastizität dar. Die fein gestrichelte Kurve zeigt das Resultat von Eringen [12], welches mit Hilfe der nichtlokalen Elastizität hergeleitet wurde. Im Vergleich dazu, repräsentiert die volle Linie, die aus dieser Arbeit berechneten Peach-Koehler Kraft. Das Maximum dieser Kraft liegt tiefer und weiter entfernt von der Versetzungslinie. Vergrößert sich der Abstand zwischen den beiden Versetzungen  $R \rightarrow \infty$ , so bekommt man als Grenzwert

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{F}^{\text{PK}}(R) = \frac{bb'(\mu + \gamma)}{2\pi R} \mathbf{e}_R, \quad (6.312)$$

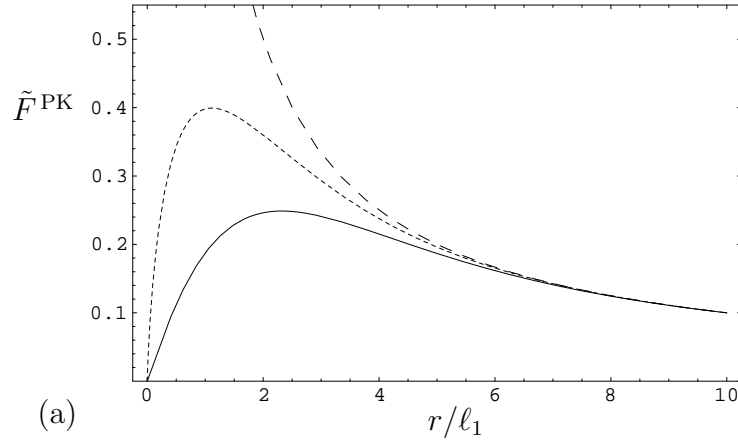


Abbildung 6.2: Die Kraftkomponente  $\tilde{F}^{PK}$  gegeben als Funktion von  $r/\ell_1$ .

welcher den klassischen Ausdruck wiedergibt. Andererseits liefert die Eichtheorie für die Nahfeld-Asymptotik  $R \rightarrow 0$

$$\lim_{R \rightarrow 0} \mathbf{F}^{PK}(R) = \mathbf{0} \quad (6.313)$$

eine verschwindende Kraft und korrigiert somit das unphysikalische Ergebnis einer unendlich groß werdenden Kraft aus der klassischen Elastizität.

Durch die Schraubenversetzung existiert im Material pro Volumeneinheit die elastische Energiedichte

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \beta_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{zx} \beta_{zx} + \sigma_{zy} \beta_{zy}). \quad (6.314)$$

Die gespeicherte potentielle Energie der Schraubenversetzung im Material aufgrund der Distorsion folgt durch Integration daraus

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} &= \int_0^R \int_0^{2\pi} W_{\text{el}} r \, d\phi \, dr = \frac{(\mu + \gamma) b^2}{4\pi} \int_0^R r \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right]^2 dr \\ &= \frac{(\mu + \gamma) b^2}{4\pi} \left[ \ln r + 2K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right) + \frac{1}{2} \frac{r^2}{\ell_1^2} \left( K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right)^2 - K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right) K_2\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right) \right] \Big|_0^R, \end{aligned} \quad (6.315)$$

wobei  $R$  für die größte Längenabmessung des Kontinuums steht. Mit Hilfe der Taylorreihen Entwicklungen für die modifizierten Bessel Funktionen in der Nähe des Nullpunktes  $r \rightarrow 0$  (siehe Anhang, Gl. (A.23)–(A.25)), ergibt sich nach Ausführung der Integration folgender Ausdruck für die elastische Energie

$$E_{\text{el}} = \frac{(\mu + \gamma) b^2}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{\ln R}{2\ell_1} + \gamma_c - \frac{1}{2} + 2K_0\left(\frac{R}{\ell_1}\right) \right] + \frac{R^2}{2\ell_1^2} \left[ K_1\left(\frac{R}{\ell_1}\right)^2 - K_0\left(\frac{R}{\ell_1}\right) K_2\left(\frac{R}{\ell_1}\right) \right] \right\}. \quad (6.316)$$

Im Gegensatz zum Ergebnis der Elastizitätstheorie weist  $E_{\text{el}}$  auf der Versetzungslinie  $r = 0$  keine Singularität auf. Die in der Schraubenversetzung gespeicherte Kernenergiedichte berechnet sich aus

$$W_{\text{ke}} = \frac{1}{4} H_{ijk} T_{ijk} = \frac{1}{4} (H_{zxy} T_{zxy} + H_{zyx} T_{zyx}). \quad (6.317)$$

Daraus folgt durch Integration für die Kernenergie der Schraubenversetzung

$$\begin{aligned} E_{\text{ke}} &= \int_0^R \int_0^{2\pi} W_{\text{ke}} r \, d\phi \, dr = \frac{(\mu + \gamma)b^2}{4\pi\ell_1^2} \int_0^R r K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right)^2 dr \\ &= \frac{(\mu + \gamma)b^2}{8\pi\ell_1^2} r^2 \left[ K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right)^2 - K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right)^2 \right] \Big|_0^R, \end{aligned} \quad (6.318)$$

welche folgendes Resultat liefert

$$E_{\text{ke}} = \frac{(\mu + \gamma)b^2}{8\pi} \left[ 1 + \frac{R^2}{\ell_1^2} \left( K_0^2\left(\frac{R}{\ell_1}\right) - K_1^2\left(\frac{R}{\ell_1}\right) \right) \right]. \quad (6.319)$$

Somit bekommt man für die totale Energie einer Schraubenversetzung

$$E_{\text{Schraube}} = E_{\text{el}} + E_{\text{ke}} = \frac{(\mu + \gamma)b^2}{4\pi} \left[ \ln \frac{R}{2\ell_1} + \gamma_c + 2K_0\left(\frac{R}{\ell_1}\right) - \frac{R}{\ell_1} K_0\left(\frac{R}{\ell_1}\right) K_1\left(\frac{R}{\ell_1}\right) \right]. \quad (6.320)$$

Hier möchten wir kurz auch eine andere Möglichkeit erläutern wie man auf die Formel (6.292) für die Wechselwirkungskraft zwischen zwei parallelen geradlinigen Schraubenversetzungen kommen kann. Als erstes schreibt man die gesamte Energiedichte

$$\begin{aligned} W_{\text{Schraube}}(r, R-r) &= W_{\text{el}}(r, R-r) + W_{\text{ke}}(r, R-r) \\ &= \frac{1}{2}(\mu + \gamma)[\beta_{z\phi}(r) + \beta_{z\phi}(R-r)]^2 + \frac{2}{4}c_1[\alpha_{zz}(r) + \alpha_{zz}(R-r)]^2 \\ &= W_{\text{el}}(r) + W_{\text{ke}}(r) + W_{\text{el}}(R-r) + W_{\text{ke}}(R-r) \\ &\quad + W_{\text{el}}^{\text{we}}(r, R-r) + W_{\text{ke}}^{\text{we}}(r, R-r). \end{aligned} \quad (6.321)$$

Diese setzt sich aus vier Termen zusammen. Die ersten vier beschreiben die eigene elastische und Kernenergiedichte der zwei Schraubenversetzungen

$$W_{\text{Schraube}}(r) = W_{\text{el}}(r) + W_{\text{ke}}(r) = \frac{1}{2}(\mu + \gamma)\beta_{z\phi}^2(r) + \frac{1}{4}c_1\alpha_{zz}^2(r) \quad (6.322)$$

$$\begin{aligned} W_{\text{Schraube}}(R-r) &= W_{\text{el}}(R-r) + W_{\text{ke}}(R-r) \\ &= \frac{1}{2}(\mu + \gamma)\beta_{z\phi}^2(R-r) + \frac{1}{4}c_1\alpha_{zz}^2(R-r). \end{aligned} \quad (6.323)$$

Die übrigen zwei Anteile sind für die Wechselwirkung zwischen den Versetzungen zuständig.  $W_{\text{el}}^{\text{we}}(r, R-r)$  ist die elastische Wechselwirkungsenergiedichte und  $W_{\text{ke}}^{\text{we}}(r, R-r)$

$r$ ) stellt die Wechselwirkungsenergiedichte der beiden Kerne dar. Ihr Betrag berechnet sich aus folgenden Ausdrücken

$$W_{\text{el}}^{\text{we}}(r, R-r) = (\mu + \gamma)\beta_{z\phi}(R-r)\beta_{z\phi}(r) = \sigma_{z\phi}(R-r)\beta_{z\phi}(r) \quad (6.324)$$

$$W_{\text{ke}}^{\text{we}}(r, R-r) = \frac{1}{2}c_1\alpha_{zz}(R-r)\alpha_{zz}(r) = 2H_{zr\phi}(R-r)T_{zr\phi}(r). \quad (6.325)$$

Die Peach-Koehler Kraft folgt aus  $W_{\text{el}}^{\text{we}}(r, R-r)$ . Multipliziert man diesen Anteil mit dem infinitesimalen Linienelement  $r d\phi$  so bekommt man

$$dE_{\text{el}}^{\text{we}} = \sigma_{z\phi}(R-r)\beta_{z\phi}(r)r d\phi = \sigma_{z\phi}(R-r)db(r), \quad (6.326)$$

wobei die elastische Wechselwirkungsenergie pro radialer Längeneinheit

$$dE_{\text{el}}^{\text{we}} := W_{\text{el}}^{\text{we}}r d\phi = \sigma_{z\phi}(R-r)db(r) \quad (6.327)$$

definiert wurde. Aus der Definition der Zentralkraft

$$F_r(r) := -\frac{dE_{\text{el}}^{\text{we}}}{dr} \quad (6.328)$$

und unter Berücksichtigung von  $db(r) = \alpha_{zz}(r)r d\phi dr$ , anschließende Integration und dem Gleichsetzen der unteren Integrationsgrenze mit Null  $F_r(0) = 0$  folgt die Gl. (6.292). Die Peach-Koehler Kraft, die aus Symmetrieüberlegungen hergeleitet worden ist, nämlich durch den lokalen Bruch der Translationssymmetrie des elastischen Teilsystems  $W_{\text{el}}$ , kann man auch aus dem Teil  $W_{\text{el}}^{\text{we}}(r, R-r)$  der Wechselwirkungsenergiedichte bekommen. In der Arbeit [11] wird zur Berechnung der Kraft die gesamte Wechselwirkungsenergiedichte, als Summe aus der elastischen Wechselwirkungsenergiedichte  $W_{\text{el}}^{\text{we}}(r, R-r)$  mit der Wechselwirkungsenergiedichte  $W_{\text{ke}}^{\text{we}}(r, R-r)$  zwischen den beiden Versetzungskernen, benutzt. Die Rechnung liefert eine viel höhere Kraft  $\bar{F}_r(R)$  im Kernbereich

$$\bar{F}_r(R) = \frac{bb'\mu}{2\pi R} \left[ 1 - \frac{R}{\ell_1} K_1\left(\frac{R}{\ell_1}\right) \right]. \quad (6.329)$$

In dieser Theorie gibt es nur einen einzigen Kopplungsparameter, der mit unserem  $c_1$  identisch ist. Es gibt also in dem Materialgesetz für die Hyperspannungen nur den Materialparameter  $c_1$ . Wir wählen einen Querstrich über die Kraft, um sie vom unseren Resultat zu unterscheiden. Der zusätzliche Energieterm für die Wechselwirkung zwischen beiden Versetzungskernen führt dazu, daß der letzte Term in der eckigen Klammer der Konfigurationskraft (6.310) in der Gl. (6.329) für die Wechselwirkungskraft aus [11] nicht vorkommt. Aus diesem Grund liegt das Maximum aus dieser Theorie höher und seine Lage liegt näher zur Versetzungslinie. Ein Vergleich der Resultate für die dimensionslose Kräfte beider Theorien zeigt die Abb. 6.2. Ein weiterer Unterschied besteht für die Steigung der Tangente der beiden Kurven an der Stelle  $r = 0$ . Während man aus Gl. (6.310) folgende Taylor-Reihe Entwicklung um die Stelle  $r = 0$  bekommt

$$F_r(0) + \frac{dF_r(r)}{dr} = \frac{1}{4} + \left( 3 \ln r - 3 \ln 2 - \frac{5}{4} + 3\gamma_c \right) \frac{r^2}{16} + O(r^4) \quad (6.330)$$

und somit eine endliche Steigung für die Tangente an der Peach-Koehler Kraft

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{dF_r(r)}{dr} = \frac{1}{4}, \quad (6.331)$$

gilt für Gl. (6.329) die folgende Taylor-Reihe Entwicklung

$$\bar{F}_r(0) + \frac{d\bar{F}_r(r)}{dr} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \gamma_c - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln r + \left( 3 \ln 2 - 3 \ln r + \frac{11}{4} - 3\gamma_c \right) \frac{r^2}{16} + O(r^4), \quad (6.332)$$

aus welcher sich an der Stelle  $r = 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d\bar{F}_r(r)}{dr} = \infty, \quad (6.333)$$

eine unendliche Steigung für die Tangente ergibt.

### 6.4.2 Stufenversetzung

Für eine gerade Stufenversetzung mit der Versetzungslinie in Richtung der  $z$ -Achse gibt es folgende kinematischen Zustandsgrößen

$$\beta_{ij} = \begin{pmatrix} \beta_{xx} & \beta_{xy} & 0 \\ \beta_{yx} & \beta_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{xz} \\ 0 & 0 & \alpha_{yz} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.334)$$

Es handelt sich hierbei ebenfalls um einen ebenen Verzerrungszustand ("plane strain"). Es gibt die Komponenten  $\alpha_{xz}$  und  $\alpha_{yz}$  des Versetzungsdichtetensors, die einer Stufenversetzung mit dem Burgersvektor entlang der  $x$  und  $y$ -Achse entsprechen. Die Rechnung kann genauso wie für die Schraubenversetzung mit den Mitteln der klassischen Elastizitätstheorie ausgeführt werden. Der Verzerrungszustand wird durch die Versetzungslinie in einem unendlich ausgedehnten, isotropen Medium hervorgerufen. Zeigt der Burgersvektor entlang der  $x$ -Achse, dann liefert diese Theorie [124, 122] die symmetrischen Spannungsfelder

$$\sigma_{xx}^0 = -A \frac{y}{r^4} (y^2 + 3x^2), \quad \sigma_{yy}^0 = -A \frac{y}{r^4} (y^2 - x^2), \quad (6.335)$$

$$\sigma_{xy}^0 = A \frac{x}{r^4} (y^2 - x^2), \quad \sigma_{zz}^0 = -2\nu A \frac{y}{r^2}, \quad (6.336)$$

mit dem Vorfaktor  $A$  gegeben durch

$$A := \frac{\mu b}{2\pi(1-\nu)}. \quad (6.337)$$

Mit Hilfe der Eichtheorie für die allgemeinen asymmetrischen Spannungen wird in diesem Kapitel gezeigt wie die klassische Lösung für den Bereich des Versetzungskernes regularisiert wird und welche Form das Fernfeld, durch das Konsitutivgesetz (6.29)

für die Spannungen eines isotropen Materials annimmt. Aus der Gleichung (6.230) können fünf Gleichungen für die Komponenten  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{zz}$  der Stufenversetzung gewonnen werden

$$2\gamma(c_2 - c_1) \Delta \sigma_{xx} + [(c_1 - c_2 + 2c_3)2\gamma\nu - 2c_3\gamma(1 + \nu)] (\sigma_{xx,yy} + \sigma_{yy,yy}) + [(c_1 - c_2)(\gamma - \mu) - c_3(\gamma + \mu)] (\sigma_{xx,xx} + \sigma_{yy,yy}) + 4\mu\gamma\sigma_{xx} = 4\mu\gamma\sigma_{xx}^0, \quad (6.338)$$

$$2\gamma(c_2 - c_1) \Delta \sigma_{yy} + [(c_1 - c_2 + 2c_3)2\gamma\nu - 2c_3\gamma(1 + \nu)] (\sigma_{xx,xx} + \sigma_{yy,yy}) + [(c_1 - c_2)(\gamma - \mu) - c_3(\gamma + \mu)] (\sigma_{xy,xy} + \sigma_{yy,yy}) + 4\mu\gamma\sigma_{yy} = 4\mu\gamma\sigma_{yy}^0, \quad (6.339)$$

$$[c_2(\gamma - \mu) - c_1(\gamma + \mu)] \Delta \sigma_{xy} + [c_2(\gamma + \mu) - c_1(\gamma - \mu)] (\sigma_{yx,xx} - \sigma_{xx,xy}) + [2\mu c_2 - c_3(\gamma + \mu)] (\sigma_{xy,xx} + \sigma_{yy,yy}) - [(c_1 - c_2 + 2c_3)2\gamma\nu - 2c_3\gamma(1 + \nu)] (\sigma_{xx,xy} + \sigma_{yy,xy}) + 4\mu\gamma\sigma_{xy} = 4\mu\gamma\sigma_{xy}^0, \quad (6.340)$$

$$[c_2(\gamma - \mu) - c_1(\gamma + \mu)] \Delta \sigma_{yx} + [c_2(\gamma + \mu) - c_1(\gamma - \mu)] (\sigma_{yx,yy} - \sigma_{yy,yx}) + [2\mu c_2 - c_3(\gamma + \mu)] (\sigma_{xx,xy} + \sigma_{yy,yy}) - [(c_1 - c_2 + 2c_3)2\gamma\nu - 2c_3\gamma(1 + \nu)] (\sigma_{xx,yx} + \sigma_{yy,yx}) + 4\mu\gamma\sigma_{yx} = 4\mu\gamma\sigma_{yx}^0, \quad (6.341)$$

$$\left[1 - \frac{(1 - \nu)}{2\mu\nu} c_3 \Delta\right] \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^0. \quad (6.342)$$

Die Gleichungen (6.338)–(6.341) werden mit dem folgenden Spannungsfunktionsansatz

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \partial_{yy}^2 f - \partial_{xy}^2 \Psi & -\partial_{xy}^2 f + \partial_{xx}^2 \Psi & 0 \\ -\partial_{xy}^2 f - \partial_{yy}^2 \Psi & \partial_{xx}^2 f + \partial_{xy}^2 \Psi & 0 \\ 0 & 0 & \nu \Delta f \end{pmatrix} \quad (6.343)$$

in ein überbestimmtes System von fünf Gleichungen für die Spannungsfunktionen  $f, \Psi$  überführt

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \left(1 - \frac{(c_1 - c_2 + c_3)(1 - \nu)}{2\mu} \Delta\right) f - f^0 \right] - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \left(1 - \frac{(c_1 - c_2 + c_3)(\mu + \gamma)}{4\mu\gamma} \Delta\right) \Psi - \Psi^0 \right] = 0, \quad (6.344)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \left(1 - \frac{(c_1 - c_2 + c_3)(1 - \nu)}{2\mu} \Delta\right) f - f^0 \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \left(1 - \frac{(c_1 - c_2 + c_3)(\mu + \gamma)}{4\mu\gamma} \Delta\right) \Psi - \Psi^0 \right] = 0, \quad (6.345)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \left(1 - \frac{(c_1 - c_2 + c_3)(1 - \nu)}{2\mu} \Delta\right) f - f^0 \right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \left(1 - \frac{(c_1 - c_2 + c_3)(\mu + \gamma)}{4\mu\gamma} \Delta\right) \Psi - \Psi^0 \right] = 0, \quad (6.346)$$



$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ \left( 1 - \frac{(c_1 - c_2 + c_3)(1 - \nu)}{2\mu} \Delta \right) f - f^0 \right] \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \left( 1 - \frac{(c_1 - c_2 + c_3)(\mu + \gamma)}{4\mu\gamma} \Delta \right) \Psi - \Psi^0 \right] = 0, \end{aligned} \quad (6.347)$$

$$\Delta \left[ \left( 1 - \frac{(1 - \nu)}{2\mu\nu} c_3 \Delta \right) f - f^0 \right] = 0. \quad (6.348)$$

Der oben erwähnte Spannungsfunktionsansatz enthält die Airysche Spannungsfunktion  $f$  und zusätzlich die von Mindlin [66] eingeführte Spannungsfunktion  $\Psi$ , die zum ersten Mal für ein isotropes, elastisches Material mit Momentenspannungen “Couple stress theory” benutzt wurde. Dieser Spannungsfunktionsansatz findet auch in der mikropolaren Elastizitätstheorie Anwendung [125]. Es zeigt sich, daß dieser Ansatz zu einer Entkopplung der Differentialgleichungen der Eichfeldtheorie für die einzelnen Spannungskomponenten führt. Addiert man die Gleichung (6.344) für die  $\sigma_{xx}$  Komponente mit der Gleichung (6.345) für die  $\sigma_{yy}$  zusammen, dann heben sich die Anteile für die Spannungsfunktion  $\Psi$  auf und es ergibt sich folgende Gleichung für  $f$

$$\Delta \left[ \left( 1 - \frac{(c_1 - c_2 + c_3)(1 - \nu)}{2\mu} \Delta \right) f - f^0 \right] = 0. \quad (6.349)$$

Der Vergleich von (6.348) mit (6.349) liefert eine Beziehung für den Materialparameter  $c_3$

$$c_3 = \frac{\nu}{1 - \nu} (c_1 - c_2), \quad (6.350)$$

welche, in den irreduziblen Parametern  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$

$$a_2 = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} a_1 \quad (6.351)$$

umgeschrieben werden kann. Aus der Bedingung (6.351) gilt immer für  $a_1 \geq 0$  auch  $a_2 \geq 0$ , da für den Gültigkeitsbereich der Poissonschen Querkontraktionszahl (2.39) der Vorfaktor  $(1 + \nu)/(1 - \nu) \geq 0$  immer größer Null ist. Damit beschränkt sich der Materialparameter  $a_2$  im Intervall

$$0 \leq a_2 \leq 3a_1. \quad (6.352)$$

Die Einstein Wahl mit  $a_2 = -a_1$  und  $a_3 = -1/2 a_1$  ist somit für eine Stufenversetzung durch die Bedingung (6.351) nicht möglich. Diese Wahl führt zu einem oszillierendem, abklingendem Verhalten für die Spannungen und die Versetzungsdichte und verletzt im Bereich des Versetzungskernes die Bedingung  $e_{zz} = \beta_{(zz)} = 0$  [6]. Die Gleichungen (6.344)–(6.348) können erfüllt werden, wenn folgende Gleichungen für die Span-

nungsfunktionen  $f, \Psi$  gelten

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ (1 - \ell_2^2 \Delta) f - f^0 \right] - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ (1 - \ell_3^2 \Delta) \Psi - \Psi^0 \right] = 0, \quad (6.353)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ (1 - \ell_2^2 \Delta) f - f^0 \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ (1 - \ell_3^2 \Delta) \Psi - \Psi^0 \right] = 0, \quad (6.354)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ (1 - \ell_2^2 \Delta) f - f^0 \right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ (1 - \ell_3^2 \Delta) \Psi - \Psi^0 \right] = 0, \quad (6.355)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ (1 - \ell_2^2 \Delta) f - f^0 \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ (1 - \ell_3^2 \Delta) \Psi - \Psi^0 \right] = 0, \quad (6.356)$$

$$\Delta \left[ (1 - \ell_2^2 \Delta) f - f^0 \right] = 0, \quad (6.357)$$

mit den zwei inneren Längen  $\ell_2, \ell_3$

$$\ell_2^2 = \frac{c_1 - c_2}{2\mu} = \frac{a_1}{2\mu} = \ell_1^2, \quad (6.358)$$

$$\ell_3^2 = \frac{(c_1 - c_2)(\mu + \gamma)}{4\mu\gamma(1 - \nu)} = \frac{a_1(\mu + \gamma)}{4\mu\gamma(1 - \nu)}. \quad (6.359)$$

Verglichen mit der Eichfeldtheorie für symmetrische Spannungen kommt die neue innere Länge  $\ell_3$  hinzu. Man sieht aus der Gleichung (6.351) für  $a_2$ , daß im Falle  $a_2 = 0$  auch  $a_1 = 0$  und  $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 0$  gilt. Als Resultat bekommt man die klassische Lösung  $f = f^0, \Psi = \Psi^0$ . Ein vernünftiges Materialmodell für die Hyperspannungen  $H_{ijk}$ , welches mit den asymmetrischen Spannungen (6.29) eines isotropen Materials kompatibel sein soll, muß für die Beschreibung der Spannungsverläufe um eine Stufenversetzung  $a_2 \neq 0$  besitzen. Andernfalls liefert das Eichfeldtheoretische Modell als Lösung nur die triviale Lösung  $f = f^0, \Psi = \Psi^0$ . Für die Schraubenversetzung ergab sich für die Existenz einer nichttrivialen Lösung  $a_1 \neq 0$  und  $a_3 \neq 0$ . Ein Materialmodell für die Hyperspannungen  $H_{ijk}$ , welches für eine Schraubenversetzung und eine Stufenversetzung geeignet sein sollte, muß drei Materialparameter  $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$  haben. Die Gleichungen (6.353)–(6.357) werden erfüllt, wenn folgende Gleichungen für die Spannungsfunktionen  $f, \Psi$  gelten

$$[1 - \ell_2^2 \Delta] f = f^0, \quad (6.360)$$

$$[1 - \ell_3^2 \Delta] \Psi = \Psi^0. \quad (6.361)$$

Um die Rechnung für die Eichfeldtheorie fortzusetzen, muß man die Spannungsfunktionen  $f^0, \Psi^0$  kennen. Diese müssen nach der modifizierten klassischen Elastizität für das Problem der Stufenversetzung mit asymmetrischen Spannungen bestimmt werden. Der Versetzungsdichtentensor für das ebene Verzerrungsproblem der Stufenversetzung besitzt im allgemeinen die zwei Komponenten

$$\alpha_{xz}^0 = \beta_{xy,x}^0 - \beta_{xx,y}^0, \quad (6.362)$$

$$\alpha_{yz}^0 = \beta_{yy,x}^0 - \beta_{yx,y}^0. \quad (6.363)$$

Aus diesen Komponenten konstruiert man zwei neue Größen, die uns dabei helfen werden  $f^0, \Psi^0$  auszurechnen. Diese bezeichnen wir mit  $A_1, A_2$ . Sie sind durch

$$A_1 = \alpha_{yz,x}^0 - \alpha_{xz,y}^0 = \beta_{yy,xx}^0 + \beta_{xx,yy}^0 - \beta_{xy,xy}^0 - \beta_{yx,xy}^0, \quad (6.364)$$

$$A_2 = -\alpha_{xz,x}^0 - \alpha_{yz,y}^0 = \beta_{yx,yy}^0 - \beta_{xy,xx}^0 + \beta_{xx,xy}^0 - \beta_{yy,xy}^0. \quad (6.365)$$

gegeben [125]. Mit Hilfe des inversen Materialgesetzes ergeben sich aus den Gln. (6.364) und (6.365) folgende Beziehungen

$$A_1 := \frac{1}{2\mu}(\sigma_{xx,yy}^0 + \sigma_{yy,xx}^0 - \sigma_{xy,xy}^0 - \sigma_{yx,xy}^0) - \frac{\nu}{2\mu} \Delta(\sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0), \quad (6.366)$$

$$A_2 := \frac{1}{2\mu}(\sigma_{xx,xy}^0 - \sigma_{yy,xy}^0) + \frac{\gamma - \mu}{4\mu\gamma}(\sigma_{xy,yy}^0 - \sigma_{yx,xx}^0) + \frac{\gamma + \mu}{4\mu\gamma}(\sigma_{yx,yy}^0 - \sigma_{xy,xx}^0). \quad (6.367)$$

Unter Benutzung des Kräftegleichgewichts  $\sigma_{ij,j} = 0$  mit  $i = 1, 2$  für den ebenen Fall können die Scherspannungen

$$\sigma_{xy,yx}^0 = -\sigma_{xx,xx}^0, \quad \sigma_{yx,xy}^0 = -\sigma_{yy,yy}^0, \quad (6.368)$$

in der Gl. (6.366) eliminiert werden. Dabei wurde die erste Bilanzgleichung in (6.368) nach der Koordinate  $x$  und die zweite nach der Koordinate  $y$  abgeleitet. Damit erhält man für  $A_1$  den folgenden Ausdruck

$$A_1 = \frac{1 - \nu}{2\mu} \Delta(\sigma_{xx}^0 + \sigma_{yy}^0). \quad (6.369)$$

Wird der Spannungsfunktionsansatz (6.343) mit den Funktionen  $f^0, \Psi^0$

$$\sigma_{ij}^0 = \begin{pmatrix} \partial_{yy}^2 f^0 - \partial_{xy}^2 \Psi^0 & -\partial_{xy}^2 f^0 + \partial_{xx}^2 \Psi^0 & 0 \\ -\partial_{xy}^2 f^0 - \partial_{yy}^2 \Psi^0 & \partial_{xx}^2 f^0 + \partial_{xy}^2 \Psi^0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \Delta f^0 \end{pmatrix} \quad (6.370)$$

in die Gleichungen (6.369) und (6.367) eingesetzt, so folgen die zwei inhomogene biharmonische Gleichungen

$$\Delta \Delta f^0 = \frac{2\mu}{1 - \nu} A_1, \quad (6.371)$$

$$\Delta \Delta \Psi^0 = -\frac{4\mu\gamma}{\mu + \gamma} A_2. \quad (6.372)$$

Betrachtet man eine Stufenversetzung mit dem Burgersvektor vom Betrag  $b$  in der  $x$ -Richtung, so gilt für die Komponenten  $\alpha_{yz}^0, \alpha_{xz}^0$  des Versetzungsdichtetensors

$$\alpha_{yz}^0 = 0, \quad \alpha_{xz}^0 = b \delta(x) \delta(y). \quad (6.373)$$

Damit bekommt man aus Gln. (6.371) und (6.372)

$$\Delta\Delta f^0 = -\frac{2\mu b}{1-\nu} \partial_y[\delta(x)\delta(y)], \quad (6.374)$$

$$\Delta\Delta \Psi^0 = \frac{4\mu\gamma b}{\mu+\gamma} \partial_x[\delta(x)\delta(y)]. \quad (6.375)$$

Aus der Greenschen Funktion  $G$  der zwei-dimensionalen bi-harmonischen Gleichung:

$$\Delta\Delta G = \delta(x)\delta(y), \quad G = \frac{1}{8\pi} r^2 \ln r, \quad (6.376)$$

bekommt man für die "klassischen" Spannungsfunktionen  $f^0$ ,  $\Psi^0$  folgendes Resultat

$$f^0 = -\frac{\mu b}{4\pi(1-\nu)} \frac{\partial(r^2 \ln r)}{\partial y} = -\frac{\mu b}{4\pi(1-\nu)} y(1 + 2 \ln r), \quad (6.377)$$

$$\Psi^0 = \frac{\mu\gamma b}{2\pi(\mu+\gamma)} \frac{\partial(r^2 \ln r)}{\partial x} = \frac{\mu\gamma b}{2\pi(\mu+\gamma)} x(1 + 2 \ln r). \quad (6.378)$$

Aus den bekannten Funktionen  $f^0$ ,  $\Psi^0$  ergeben sich die klassischen asymmetrischen Spannungsfelder für das Fernfeld

$$\sigma_{xx}^0 = -\frac{y}{r^4} [A(y^2 + 3x^2) - B(x^2 - y^2)], \quad (6.379)$$

$$\sigma_{yy}^0 = \frac{y}{r^4} [A(x^2 - y^2) - B(x^2 - y^2)], \quad (6.380)$$

$$\sigma_{xy}^0 = \frac{x}{r^4} [A(x^2 - y^2) + B(x^2 + 3y^2)], \quad (6.381)$$

$$\sigma_{yx}^0 = \frac{x}{r^4} [A(x^2 - y^2) - B(x^2 - y^2)], \quad (6.382)$$

$$\sigma_{zz}^0 = -2\nu A \frac{y}{r^2}, \quad (6.383)$$

mit dem Vorfaktor

$$B := \frac{\mu\gamma b}{\pi(\mu+\gamma)}. \quad (6.384)$$

Ein Vergleich mit den klassischen Lösungen (6.335), (6.336), die aus einem Konstitutivgesetz für symmetrische Spannungen ergaben, erkennt man den Effekt der Asymmetrie bei den Termen mit dem Vorfaktor  $B$ . Die nun bekannten klassischen Spannungsfunktionen  $f^0$ ,  $\Psi^0$  werden in die Gleichungen (6.360) und (6.361) eingesetzt. Die Lösung dieser inhomogenen Helmholtz Gleichungen lautet

$$f = -\frac{\mu b}{4\pi(1-\nu)} \left[ y(1 + 2 \ln r) + 4\ell_2^2 \left( \frac{y}{r^2} - \frac{y}{r} \frac{1}{\ell_2} K_1\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right) \right], \quad (6.385)$$

$$\Psi = \frac{\mu\gamma b}{2\pi(\mu+\gamma)} \left[ x(1 + 2 \ln r) + 4\ell_3^2 \left( \frac{x}{r^2} - \frac{x}{r} \frac{1}{\ell_3} K_1\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right) \right]. \quad (6.386)$$

Damit ergeben sich aus der Eichtheorie der Versetzungen folgende Spannungskomponenten  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{zz}$  für die Stufeversetzung

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & -\frac{y}{r^4} \left\{ A \left[ (y^2 + 3x^2) + \frac{4\ell_2^2}{r^2} (y^2 - 3x^2) - 2y^2 \frac{r}{\ell_2} K_1\left(\frac{r}{\ell_2}\right) - 2(y^2 - 3x^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right] \right. \\ & \left. - B \left[ (x^2 - y^2) - \frac{4\ell_3^2}{r^2} (3x^2 - y^2) + 2x^2 \frac{r}{\ell_3} K_1\left(\frac{r}{\ell_3}\right) + 2(3x^2 - y^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.387)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & -\frac{y}{r^4} \left\{ A \left[ (y^2 - x^2) - \frac{4\ell_2^2}{r^2} (y^2 - 3x^2) - 2x^2 \frac{r}{\ell_2} K_1\left(\frac{r}{\ell_2}\right) + 2(y^2 - 3x^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right] \right. \\ & \left. + B \left[ (x^2 - y^2) - \frac{4\ell_3^2}{r^2} (3x^2 - y^2) + 2x^2 \frac{r}{\ell_3} K_1\left(\frac{r}{\ell_3}\right) + 2(3x^2 - y^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.388)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = & \frac{x}{r^4} \left\{ A \left[ (x^2 - y^2) - \frac{4\ell_2^2}{r^2} (x^2 - 3y^2) - 2y^2 \frac{r}{\ell_2} K_1\left(\frac{r}{\ell_2}\right) + 2(x^2 - 3y^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right] \right. \\ & \left. + B \left[ (x^2 + 3y^2) + \frac{4\ell_3^2}{r^2} (x^2 - 3y^2) - 2x^2 \frac{r}{\ell_3} K_1\left(\frac{r}{\ell_3}\right) - 2(x^2 - 3y^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.389)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yx} = & \frac{x}{r^4} \left\{ A \left[ (x^2 - y^2) - \frac{4\ell_2^2}{r^2} (x^2 - 3y^2) - 2y^2 \frac{r}{\ell_2} K_1\left(\frac{r}{\ell_2}\right) + 2(x^2 - 3y^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right] \right. \\ & \left. - B \left[ (x^2 - y^2) - \frac{4\ell_3^2}{r^2} (x^2 - 3y^2) - 2y^2 \frac{r}{\ell_3} K_1\left(\frac{r}{\ell_3}\right) + 2(x^2 - 3y^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.390)$$

$$\sigma_{zz} = -2\nu A \frac{y}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_2} K_1\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right]. \quad (6.391)$$

Die Spur des Spannungstensors  $\sigma_{kk}$  für die Stufenversetzung ist dann durch

$$\sigma_{kk} = (1 + \nu) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -2(1 + \nu) A \frac{y}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_2} K_1\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right] \quad (6.392)$$

gegeben. Die Spannung  $\sigma_{kk}$ , die durch eine Dilatation oder Kompression des Mediums hervorgerufen wird, hängt offenbar mit der inneren Länge  $\ell_2 = \ell_1$  zusammen. Die Krümmung des Kristallgitters ruft die antisymmetrische Spannungskomponente

$$\sigma_{[xy]} = B \frac{x}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_3} K_1\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right] \quad (6.393)$$

hervor, welche mit der Rotationslänge  $\ell_3$  zusammenhängt. Weiterhin kann man aus den Gln. (6.389) und (6.390) auch den symmetrischen Spannungsteil  $\sigma_{(xy)}$  berechnen. Dieser hängt von beiden inneren Längen  $\ell_2$  und  $\ell_3$  ab. Man betrachte die Modifikationen der Spannungsfelder (6.387)–(6.391) nahe der Versetzungslinie. Die Abb. 6.3 zeigen die einzelnen Verläufe der Spannungskomponenten im Bereich des Versetzungskernes. Die Spannungen zeigen kein singuläres Verhalten auf der Versetzungslinie und die Maxima werden in kurzem Abstand von der Versetzungslinie erreicht (siehe Abb. 6.4

und 6.5). Sie verschwinden an der Stelle  $r = 0$ . Die Spannungen nehmen folgende Extremwerte an:  $|\sigma_{xx}(0, y)| \simeq 0.546A/\ell_2 + 0.260B/\ell_3$  an der Stelle  $|y| \simeq (0.996\ell_2 + 1.494\ell_3)/2$ ,  $|\sigma_{yy}(0, y)| \simeq 0.260A/\ell_2 - 0.260B/\ell_3$  an der Stelle  $|y| \simeq (1.494\ell_2 + 1.494\ell_3)/2$ ,  $|\sigma_{xy}(x, 0)| \simeq 0.260A/\ell_2 + 0.546B/\ell_3$  an der Stelle  $|x| \simeq (1.494\ell_2 + 0.996\ell_3)/2$ ,  $|\sigma_{yx}(x, 0)| \simeq 0.260A/\ell_2 - 0.260B/\ell_3$  an der Stelle  $|x| \simeq (1.494\ell_2 + 1.494\ell_3)/2$  und  $|\sigma_{zz}(0, y)| \simeq 0.399A$  an der Stelle  $|y| \simeq 1.114\ell_2$ . Somit, bestimmen die charakteristischen inneren Längen  $\ell_2$  und  $\ell_3$  den Ort und Wert der Spannungsmaxima. Aus den Spannungskomponenten (6.387)–(6.392) folgen unter Benutzung des inversen Hookeschen-Gesetzes, die elastischen Distorsionen  $\beta_{xx}$ ,  $\beta_{yy}$ ,  $\beta_{xy}$ ,  $\beta_{yx}$ ,

$$\begin{aligned} \beta_{xx} = & -\frac{y}{r^4} \left\{ \frac{A}{2\mu} \left[ (1-2\nu)r^2 + 2x^2 + \frac{4\ell_2^2}{r^2}(y^2 - 3x^2) \right. \right. \\ & - 2(y^2 - \nu r^2) \frac{r}{\ell_2} K_1\left(\frac{r}{\ell_2}\right) - 2(y^2 - 3x^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \Big] \\ & \left. - \frac{B}{2\mu} \left[ (x^2 - y^2) - \frac{4\ell_3^2}{r^2}(3x^2 - y^2) + 2x^2 \frac{r}{\ell_3} K_1\left(\frac{r}{\ell_3}\right) - 2(y^2 - 3x^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.394)$$

$$\begin{aligned} \beta_{yy} = & -\frac{y}{r^4} \left\{ \frac{A}{2\mu} \left[ (1-2\nu)r^2 - 2x^2 - \frac{4\ell_2^2}{r^2}(y^2 - 3x^2) \right. \right. \\ & - 2(x^2 - \nu r^2) \frac{r}{\ell_2} K_1\left(\frac{r}{\ell_2}\right) + 2(y^2 - 3x^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \Big] \\ & \left. + \frac{B}{2\mu} \left[ (x^2 - y^2) - \frac{4\ell_3^2}{r^2}(3x^2 - y^2) + 2x^2 \frac{r}{\ell_3} K_1\left(\frac{r}{\ell_3}\right) - 2(y^2 - 3x^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.395)$$

$$\begin{aligned} \beta_{xy} = & \frac{x}{r^4} \left\{ \frac{A}{2\mu} \left[ (x^2 - y^2) - \frac{4\ell_2^2}{r^2}(x^2 - 3y^2) - 2y^2 \frac{r}{\ell_2} K_1\left(\frac{r}{\ell_2}\right) + 2(x^2 - 3y^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right] \right. \\ & + \frac{B}{2\mu} \left[ 2y^2 + \frac{4\ell_3^2}{r^2}(x^2 - 3y^2) + (y^2 - x^2) \frac{r}{\ell_3} K_1\left(\frac{r}{\ell_3}\right) - 2(x^2 - 3y^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right] \\ & \left. + \frac{B}{2\gamma} r^2 \left[ 1 - \frac{r}{\ell_3} K_1\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.396)$$

$$\begin{aligned} \beta_{yx} = & \frac{x}{r^4} \left\{ \frac{A}{2\mu} \left[ (x^2 - y^2) - \frac{4\ell_2^2}{r^2}(x^2 - 3y^2) - 2y^2 \frac{r}{\ell_2} K_1\left(\frac{r}{\ell_2}\right) + 2(x^2 - 3y^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right] \right. \\ & + \frac{B}{2\mu} \left[ 2y^2 + \frac{4\ell_3^2}{r^2}(x^2 - 3y^2) + (y^2 - x^2) \frac{r}{\ell_3} K_1\left(\frac{r}{\ell_3}\right) - 2(x^2 - 3y^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right] \\ & \left. - \frac{B}{2\gamma} r^2 \left[ 1 - \frac{r}{\ell_3} K_1\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.397)$$

Für die Spur des Distorsionstensors erhält man

$$\beta_{kk} = (2\nu - 1) \frac{A}{\mu} \frac{y}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_2} K_1\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right], \quad (6.398)$$

welche analog zu  $\sigma_{kk}$  nur von der inneren Länge  $\ell_2$  abhängt. Da diese Länge alleine in dem irreduziblen Anteil  $\beta_{ij}^3$  des Distorsionstensors  $\beta_{ij}$  auftaucht, bezeichnet man sie als Dilatationslänge. Der antisymmetrische Anteil  $\beta_{[xy]}$  ist gegeben durch

$$\omega_z = \beta_{[xy]} = \frac{B}{2\gamma} \frac{x}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_3} K_1\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right]. \quad (6.399)$$

Dieser entspricht dem irreduziblen Anteil  $\beta_{ij}^2$  in der Zerlegung des Distorsionstensors  $\beta_{ij}$ . Bei diesem taucht nur die innere Länge  $\ell_3$  auf, deshalb wir sie auch als Rotationslänge bezeichnen möchten. Mit Hilfe der Gl.(5.21) kann man die Komponenten des Tensors  $K_{ij}^\omega$  angeben

$$K_{zx}^\omega = -\frac{B}{2\gamma} \frac{x^2 - y^2}{r^4} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_3} K_1\left(\frac{r}{\ell_3}\right) - \frac{x^2}{(x^2 - y^2)} \frac{r^2}{\ell_3^2} K_0\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right], \quad (6.400)$$

$$K_{zy}^\omega = -\frac{B}{\gamma} \frac{xy}{r^2} \left[ \frac{2}{r^2} - \frac{1}{\ell_3^2} K_2\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right], \quad (6.401)$$

welche als langreichweitige Felder aus der Biegung des Kristallgitters durch die Stufenversetzung überleben. Diese rufen langreichweitige Momentenspannungen hervor, die man auch in der Elastizitätstheorie mit Momentenspannungen wiederfindet. Es müssen sich mehrere Versetzungen in einer spannungsfreien speziellen Anordnung wiederfinden, damit es zu einer stetigen Gitterkrümmung kommen kann. Führt man Biegeexperimente mit immer kleiner werdenden Proben, und gelangen diese in die Größenordnung  $0.1\mu m \leq r \leq 10\mu m$ , dann gilt längst nicht mehr  $r \gg \ell_3$  und die Momentenspannungen dürfen nicht vernachlässigt werden. Sie führen dann auch bei größeren Deformationen, wo plastisches Fließen eintritt, zu einer höheren Fließgrenze. Für diese Dimensionen sind die inneren charakteristischen Längen von Bedeutung, es entstehen sogenannte Längeneffekte (size effects) und die phänomenologische makroskopische Plastizität verliert dabei bei solchen Dimensionen ihren selbstähnlichen Charakter. Mit Hilfe der folgenden Umrechnungsformeln für die Spannungen in Zylinderkoordinaten

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \partial_r f + \frac{1}{r^2} \partial_{\phi\phi}^2 f - \frac{1}{r} \partial_{r\phi}^2 \Psi + \frac{1}{r^2} \partial_{\phi\phi}^2 \Psi, \quad (6.402)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \partial_{rr}^2 f + \frac{1}{r} \partial_{r\phi}^2 \Psi - \frac{1}{r^2} \partial_{\phi\phi}^2 \Psi, \quad (6.403)$$

$$\sigma_{r\phi} = -\frac{1}{r} \partial_{r\phi}^2 f + \frac{1}{r^2} \partial_{\phi\phi}^2 f + \partial_{rr}^2 \Psi, \quad (6.404)$$

$$\sigma_{\phi r} = -\frac{1}{r} \partial_{r\phi}^2 f + \frac{1}{r^2} \partial_{\phi\phi}^2 f - \frac{1}{r} \partial_r \Psi - \frac{1}{r^2} \partial_{\phi\phi}^2 \Psi, \quad (6.405)$$

können die modifizierten klassischen Spannungen  $\sigma_{rr}^0, \sigma_{\phi\phi}^0, \sigma_{r\phi}^0, \sigma_{\phi r}^0$

$$\sigma_{rr}^0 = -\frac{\sin \phi}{r} (A - B), \quad \sigma_{\phi\phi}^0 = -\frac{\sin \phi}{r} (A + B), \quad (6.406)$$

$$\sigma_{\phi r}^0 = \frac{\cos \phi}{r} (A - B), \quad \sigma_{r\phi}^0 = \frac{\cos \phi}{r} (A + B), \quad (6.407)$$

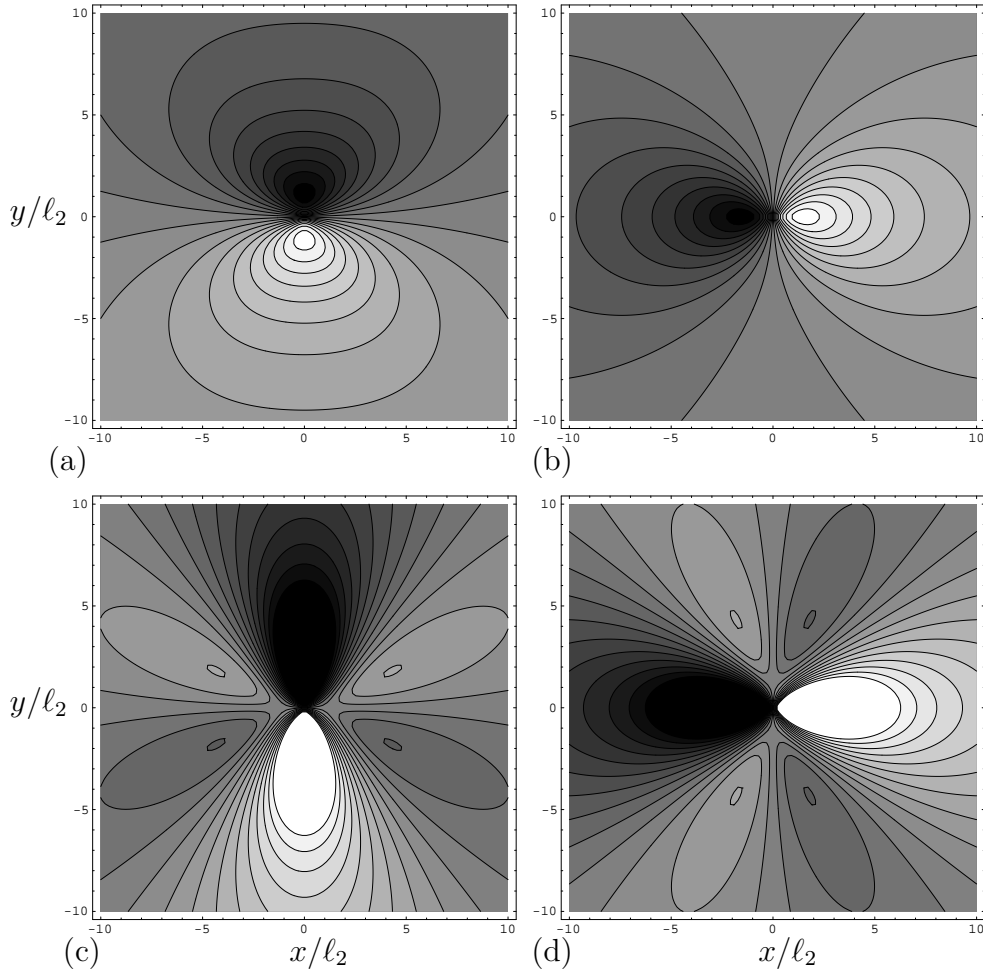


Abbildung 6.3: Der Spannungsverlauf einer Stufenversetzung in der Nähe der Versetzungslinie: (a)  $\sigma_{xx}$ , (b)  $\sigma_{xy}$ , (c)  $\sigma_{yy}$ , (d)  $\sigma_{yx}$  with  $\nu = 0.3$  and  $\gamma = \mu/2$ .

und die Spannungen aus der Eichfeldtheorie  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\phi\phi}$ ,  $\sigma_{r\phi}$ ,  $\sigma_{\phi r}$  angegeben werden

$$\sigma_{rr} = -\frac{\sin \phi}{r} \left\{ A \left[ 1 - 4 \frac{\ell_2^2}{r^2} + 2K_2 \left( \frac{r}{\ell_2} \right) \right] - B \left[ 1 - 4 \frac{\ell_3^2}{r^2} + 2K_2 \left( \frac{r}{\ell_3} \right) \right] \right\}, \quad (6.408)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\phi} = -\frac{\sin \phi}{r} \left\{ A \left[ 1 + 4 \frac{\ell_2^2}{r^2} - 2K_2 \left( \frac{r}{\ell_2} \right) - 2 \frac{r}{\ell_2} K_1 \left( \frac{r}{\ell_2} \right) \right] \right. \\ \left. + B \left[ 1 - 4 \frac{\ell_3^2}{r^2} + 2K_2 \left( \frac{r}{\ell_3} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.409)$$

$$\sigma_{\phi r} = \frac{\cos \phi}{r} \left\{ A \left[ 1 - 4 \frac{\ell_2^2}{r^2} + 2K_2 \left( \frac{r}{\ell_2} \right) \right] - B \left[ 1 - 4 \frac{\ell_3^2}{r^2} + 2K_2 \left( \frac{r}{\ell_3} \right) \right] \right\}, \quad (6.410)$$



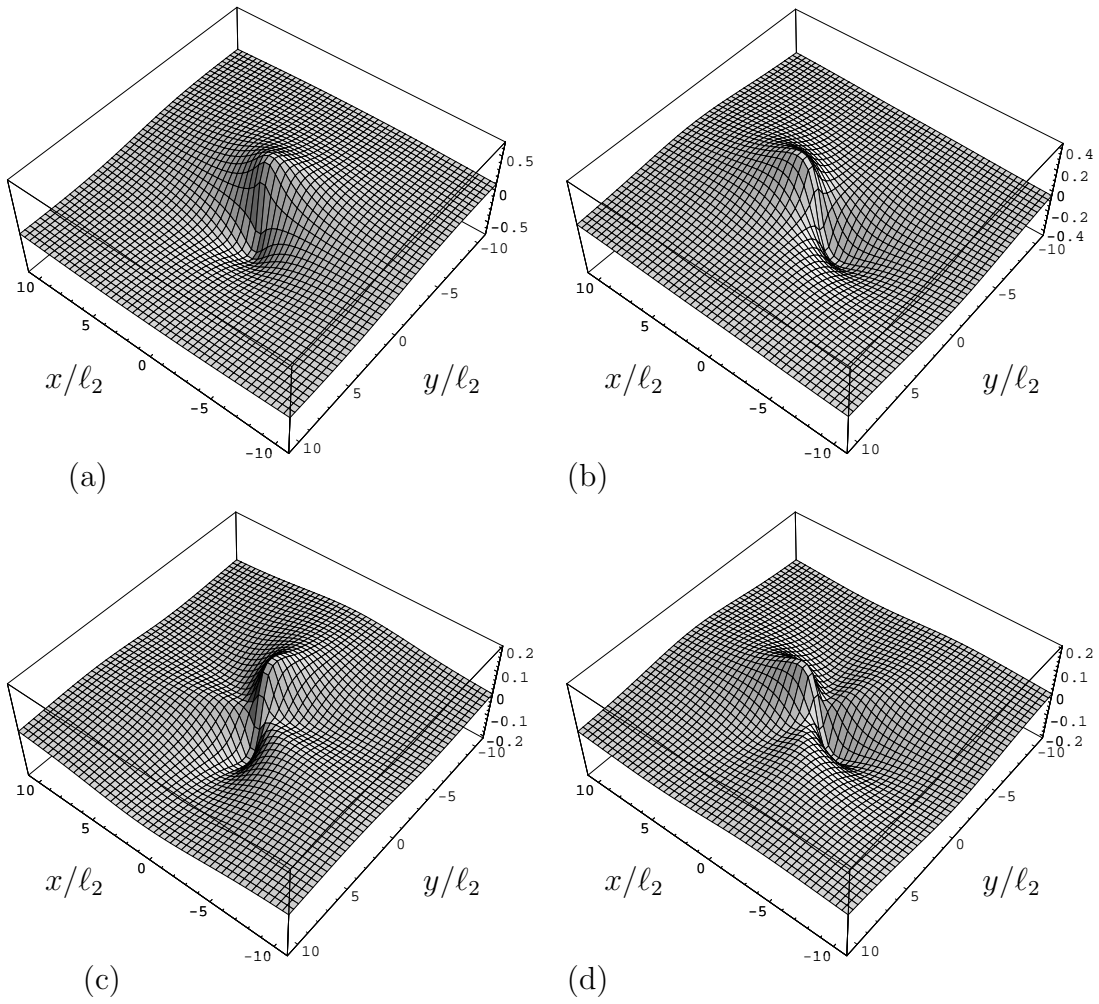


Abbildung 6.4: Die Spannungskomponenten einer Stufenversetzung: (a)  $\sigma_{xx}$ , (b)  $\sigma_{xy}$ , (c)  $\sigma_{yy}$ , (d)  $\sigma_{yx}$  sind in Einheiten von  $A$  mit  $\nu = 0.3$  und  $\gamma = \mu/2$  gegeben.

$$\sigma_{r\phi} = \frac{\cos \phi}{r} \left\{ A \left[ 1 - 4 \frac{\ell_2^2}{r^2} + 2K_2\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right] + B \left[ 1 + 4 \frac{\ell_3^2}{r^2} - 2K_2\left(\frac{r}{\ell_3}\right) - 2 \frac{r}{\ell_3} K_1\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right] \right\}. \quad (6.411)$$

Mit den ausgerechneten Distorsionen (6.394), (6.396) und (6.395), (6.397) können entsprechend die Komponenten  $\alpha_{xz}$  und  $\alpha_{yz}$  des Versetzungsdichtetensors berechnet werden

$$\alpha_{xz} = \frac{b}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\ell_2^2} K_0\left(\frac{r}{\ell_2}\right) + \frac{1}{\ell_3^2} K_0\left(\frac{r}{\ell_3}\right) + \frac{y^2 - x^2}{r^2} \left[ \frac{1}{\ell_2^2} K_2\left(\frac{r}{\ell_2}\right) - \frac{1}{\ell_3^2} K_2\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right] \right\}, \quad (6.412)$$

$$\alpha_{yz} = -\frac{b}{2\pi} \frac{xy}{r^2} \left[ \frac{1}{\ell_2^2} K_2\left(\frac{r}{\ell_2}\right) - \frac{1}{\ell_3^2} K_2\left(\frac{r}{\ell_3}\right) \right]. \quad (6.413)$$

Die Abb. (6.6) zeigt die Verläufe der beiden Komponenten  $\alpha_{xz}$  und  $\alpha_{yz}$ . Durch die

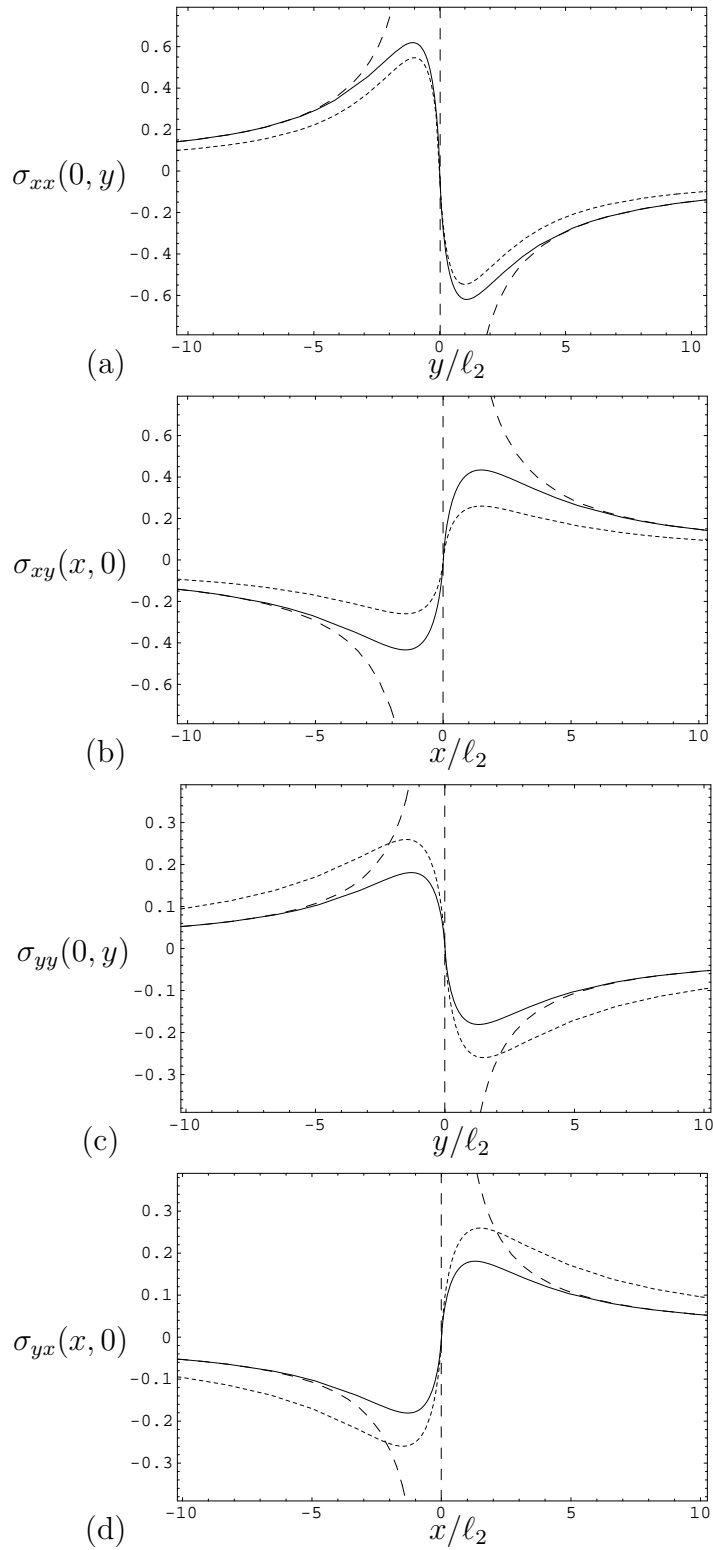


Abbildung 6.5: Die Spannungskomponenten in der Nähe der Versetzungslinie: (a)  $\sigma_{xx}(0, y)$ , (b)  $\sigma_{xy}(x, 0)$ , (c)  $\sigma_{yy}(0, y)$ , (d)  $\sigma_{yx}(x, 0)$  sind in Einheiten von  $A$  mit  $\nu = 0.3$  und  $\gamma = \mu/2$  gegeben. Die gestrichelten Kurven entsprechen den Spannungen in der asymmetrischen Elastizität und die dünn gestrichelten Kurven den symmetrischen Spannungen ( $\gamma = 0$ ).

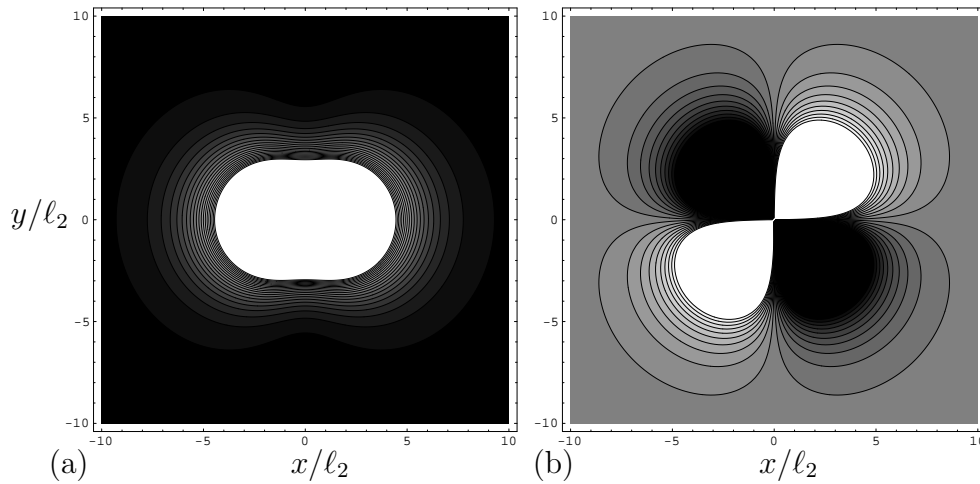


Abbildung 6.6: Die Komponenten der Versetzungsdichte einer Stufenversetzung in der Nähe der Versetzungslinie: (a)  $\alpha_{xz}$ , (b)  $\alpha_{yz}$  with  $\nu = 0.3$  and  $\gamma = \mu/2$ .

Taylorreihen Entwicklung der Bessel Funktionen  $K_0$  und  $K_2$ , (siehe Anhang, Gl. (A.23) und (A.25)) bekommt man für die Nahfelder

$$\alpha_{xz} = -\frac{b}{4\pi} \left[ \gamma_c \left( \frac{1}{\ell_2^2} + \frac{1}{\ell_3^2} \right) + \frac{1}{\ell_2^2} \ln \left( \frac{r}{\ell_2} \right) + \frac{1}{\ell_3^2} \ln \left( \frac{r}{\ell_3} \right) + \frac{y^2 - x^2}{2r^2} \left( \frac{1}{\ell_2^2} - \frac{1}{\ell_3^2} \right) \right], \quad (6.414)$$

$$\alpha_{yz} = \frac{b}{4\pi} \frac{xy}{r^2} \left( \frac{1}{\ell_2^2} - \frac{1}{\ell_3^2} \right). \quad (6.415)$$

Aus Gl. (5.21) sind die Komponenten der totalen Gitterkrümmung (Nye-Tensor), durch  $K_{zx} = \alpha_{xz}$  und  $K_{zy} = \alpha_{yz}$  gegeben.

Somit kann man den Burgersvektor als Funktion des radialen Abstandes  $r$  von der Versetzungslinie angeben

$$\begin{aligned} b(r) &= \oint (\beta_{xx} dx + \beta_{xy} dy) = \int_0^{2\pi} \int_0^r \alpha_{xz}(r', \phi') r' dr' d\phi' \\ &= b \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{r}{\ell_3} K_1 \left( \frac{r}{\ell_3} \right) + \frac{r}{\ell_2} K_1 \left( \frac{r}{\ell_2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.416)$$

Die Komponente  $\alpha_{yz}$  liefert keinen Beitrag zum Burgersvektor

$$b(r) = \oint (\beta_{yx} dx + \beta_{yy} dy) = \int_0^{2\pi} \int_0^r \alpha_{yz}(r', \phi') r' dr' d\phi' = 0. \quad (6.417)$$

Die Abb. 6.7 zeigt die Funktion des modifizierten Burgers Vektors  $b(r)$ . Mit dem Ergebnis (6.412) bekommt man die Hyperspannungskomponente für die Stufenversetzung

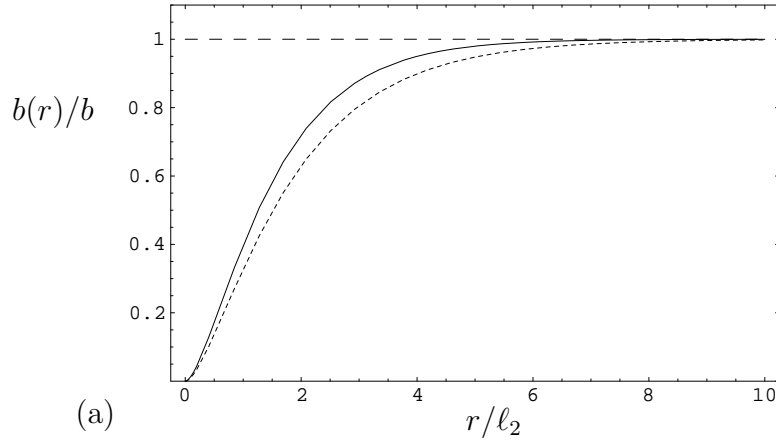


Abbildung 6.7: Der modifizierte Burgers Vektor einer Stufenversetzung  $b(r)/b$  für  $\ell_2 = \ell_3$  (volle Linie) und für  $\nu = 0.3$  und  $\gamma = \mu/2$  (gestrichelte Linie).

aus den Gln. (6.9) und (6.30)

$$\begin{aligned} H_{xxy} = H_{xz} &= \frac{(c_1 - c_2)}{1 - \nu} \alpha_{xz} \\ &= A \left[ K_0 \left( \frac{r}{\ell_2} \right) + \frac{y^2 - x^2}{r^2} K_2 \left( \frac{r}{\ell_2} \right) \right] + B \left[ K_0 \left( \frac{r}{\ell_3} \right) - \frac{y^2 - x^2}{r^2} K_2 \left( \frac{r}{\ell_3} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.418)$$

$$\begin{aligned} H_{zyz} = H_{zx} &= -\frac{\nu(c_1 - c_2)}{1 - \nu} \alpha_{xz} \\ &= -\nu \left\{ A \left[ K_0 \left( \frac{r}{\ell_2} \right) + \frac{y^2 - x^2}{r^2} K_2 \left( \frac{r}{\ell_2} \right) \right] + B \left[ K_0 \left( \frac{r}{\ell_3} \right) - \frac{y^2 - x^2}{r^2} K_2 \left( \frac{r}{\ell_3} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.419)$$

$$\begin{aligned} H_{yxy} = H_{yz} &= \frac{(c_1 - c_2)}{1 - \nu} \alpha_{yz} \\ &= -2 \frac{xy}{r^2} \left[ A K_2 \left( \frac{r}{\ell_2} \right) - B K_2 \left( \frac{r}{\ell_3} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.420)$$

$$\begin{aligned} H_{zzx} = H_{zy} &= -\frac{\nu(c_1 - c_2)}{1 - \nu} \alpha_{yz} \\ &= 2\nu \frac{xy}{r^2} \left[ A K_2 \left( \frac{r}{\ell_2} \right) - B K_2 \left( \frac{r}{\ell_3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.421)$$

In einem mikropolaren (Cosserat) Medium gelten die kinematischen Gln. (3.11) und (3.12). Aus diesen sind für ein elastisch isotropes mikropolares Medium folgende Materialgesetze

$$\sigma_{ij} = \lambda \beta_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \beta_{(ij)} + 2\gamma (\beta_{[ij]} - \epsilon_{ijk} \psi_k), \quad (6.422)$$

$$m_{ij} = \zeta \kappa_{kk} \delta_{ij} + 2\alpha \kappa_{(ij)} + 2\epsilon \kappa_{[ij]}, \quad (6.423)$$

für die Spannungen  $\sigma_{ij}$  und Momentenspannungen  $m_{ij}$  gegeben. Die Momentenspannungen  $m_{ij}$  in der mikropolaren Theorie entsprechen den langreichweitigen Momen-

tenspannungen, die sich aus dem Verkrümmungstensor  $K_{ij}^\omega$  in der Eichfeldtheorie ergeben. Im allgemeinen Fall gilt aber  $K_{ij} \neq K_{ij}^\omega$ . Die Spannungsfelder und Momentenspannungsfelder für eine Schrauben und Stufenversetzung wurden in den Arbeiten von [126, 127] berechnet. Die Ergebnisse aus beiden Theorien stimmen überein. Die inneren charakteristischen Längen in einem inkompatiblen isotropen elastischen mikropolaren Medium sind entsprechend durch

$$\ell_1^{2(m)} = \frac{\zeta + 2\alpha}{4\gamma}, \quad \ell_2^{2(m)} = \frac{(\alpha + \epsilon)(\mu + \gamma)}{4\mu\gamma}, \quad (6.424)$$

für die Schrauben und Stufenversetzung gegeben. Ein Vergleich mit den entsprechenden inneren charakteristischen Längen  $\ell_1, \ell_3$  aus der Eichfeldtheorie mit asymmetrischen Spannungen ergibt folgenden Zusammenhang

$$\zeta + 2\alpha = 2a_1 \gamma, \quad \epsilon + \alpha = \frac{a_1}{(1 - \nu)}. \quad (6.425)$$

Kennt man also die Materialparametern  $a_1$  und  $\gamma$ , dann können z.B. die Materialparameter  $\zeta$  und  $\epsilon$  aus der Gl. (6.425) eliminiert werden. Für die inneren Längen des mikropolaren Mediums wäre dann nur noch  $\alpha$  zu bestimmen.

### 6.4.3 Fall A: $\ell_3 = \ell_2$

Setzt man  $\ell_3 = \ell_2$ , so ergibt sich aus den Gln. (6.358) und (6.359) folgender Zusammenhang zwischen den Materialparametern  $\gamma, \mu, \nu$

$$\gamma = \frac{\mu}{1 - 2\nu}. \quad (6.426)$$

Der Parameter  $\gamma$  ist also für diesen Spezialfall durch Gleichung (6.426) gegeben. Die Versetzungsdichtekomponente  $\alpha_{yz}$  aus der Gl. (6.413) wird Null. Setzt man diesen Wert für  $\gamma$  in die Gleichung (6.384) für  $B$  ein, so folgt daraus, daß  $B = A$  und für die Spannungsfelder (6.387)–(6.392) ergibt sich

$$\sigma_{xx} = -2A \frac{y}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_2} K_1 \left( \frac{r}{\ell_2} \right) \right], \quad \sigma_{xy} = 2A \frac{x}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_2} K_1 \left( \frac{r}{\ell_2} \right) \right], \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{yx} = 0 \quad (6.427)$$

und die gleiche Ausdrücken für  $\sigma_{zz}$  und  $\sigma_{kk}$  wie in den Gleichungen (6.391) und (6.392) entsprechend. Für die Distorsionen (6.394)–(6.397) erhalten wir

$$\beta_{xx} = (\nu - 1) \frac{A}{\mu} \frac{y}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_2} K_1 \left( \frac{r}{\ell_2} \right) \right], \quad (6.428)$$

$$\beta_{yy} = \nu \frac{A}{\mu} \frac{y}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_2} K_1 \left( \frac{r}{\ell_2} \right) \right], \quad (6.429)$$

$$\beta_{xy} = (1 - \nu) \frac{A}{\mu} \frac{x}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_2} K_1 \left( \frac{r}{\ell_2} \right) \right], \quad (6.430)$$

$$\beta_{yx} = \nu \frac{A}{\mu} \frac{x}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_2} K_1 \left( \frac{r}{\ell_2} \right) \right]. \quad (6.431)$$

Aus den Gleichungen (6.412), (6.416) folgen für  $\ell_3 = \ell_2$  die entsprechenden Beziehungen für  $\alpha_{xz}$  und  $b(r)$

$$\alpha_{xz} = \frac{b}{2\pi} \frac{1}{\ell_2^2} K_0\left(\frac{r}{\ell_2}\right), \quad b(r) = b \left[ 1 - \frac{r}{\ell_2} K_1\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right]. \quad (6.432)$$

Für die Momentenspannungen  $H_{xz}$ ,  $H_{zx}$  folgt für  $\ell_3 = \ell_2$  aus den Gleichungen (6.418) und (6.419)

$$H_{xz} = 2A K_0\left(\frac{r}{\ell_2}\right), \quad H_{zx} = -2\nu A K_0\left(\frac{r}{\ell_2}\right). \quad (6.433)$$

Die Versetzungsdichtekomponente  $\alpha_{xz}(r, \phi) = \alpha_{xz}(r)$  wird zylindersymmetrisch. Für  $\ell_2 = 0$  bekommt man aus der Gl. (6.427) die klassischen Spannungsfelder

$$\sigma_{xx}^0 = -2A \frac{y}{r^2}, \quad (6.434)$$

$$\sigma_{yy}^0 = 0, \quad (6.435)$$

$$\sigma_{xy}^0 = 2A \frac{x}{r^2}, \quad (6.436)$$

$$\sigma_{yx}^0 = 0, \quad (6.437)$$

$$\sigma_{zz}^0 = -2\nu A \frac{y}{r^2}. \quad (6.438)$$

Im Vergleich dazu lauten die klassischen Volterra-Lösungen [110, 124]

$$\sigma_{xx}^0 = -\frac{\mu b}{\pi} \frac{y}{r^2}, \quad (6.439)$$

$$\sigma_{yy}^0 = \frac{\mu b}{\pi} \frac{y}{r^2}, \quad (6.440)$$

$$\sigma_{xy}^0 = \frac{\mu b}{\pi} \frac{x}{r^2}, \quad (6.441)$$

$$\sigma_{yx}^0 = \frac{\mu b}{\pi} \frac{x}{r^2}, \quad (6.442)$$

$$\sigma_{zz}^0 = 0, \quad (6.443)$$

Die Eichfeldtheorie liefert für den Fall  $\ell_3 = \ell_2$ , die Spannungsfelder (6.434)–(6.438). Wir möchten diese, im Vergleich zu den Spannungen (6.439)–(6.443), als einer modifizierten Volterra-Versetzung gehörig ansehen. Die Vorfaktoren sind unterschiedlich. Die Volterra-Versetzung besitzt keine  $\sigma_{zz}$  Komponente, d.h. Kompressionen und Dilationen des Kristallgitters durch die Stufenversetzung werden nicht erfaßt. In einem inkompressiblen Medium, wenn  $\nu = 1/2$  und entsprechend nach Gl. (6.426) auch  $\gamma = \infty$  ist, werden die Spannungskomponenten  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{xy}$  beider Theorien identisch. In einer modifizierten Volterra-Versetzung gilt aber immer  $\sigma_{kk} \neq 0$ , d.h. eine Stufenversetzung kann nicht in einem inkompressiblen Medium mit asymmetrischen Spannungsfelder existieren.

Die Energie zur Erzeugung einer Stufenversetzung kann analog zur Rechnung für die Schraubenversetzung berechnet werden. Aufgrund der Erzeugung einer Stufenversetzung existiert im Medium die elastische Verzerrungsenergiedichte

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \beta_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \beta_{xx} + \sigma_{xy} \beta_{xy}). \quad (6.444)$$

Die gespeicherte Verzerrungsenergie der Stufenversetzung im Material folgt aus der oben angegebenen Dichte durch Integration

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} &= \int_0^R \int_0^{2\pi} W_{\text{el}} r \, d\phi \, dr \\ &= \frac{\mu b^2}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \left[ \ln \frac{R}{2\ell_2} + \gamma_c - \frac{1}{2} + 2K_0 \left( \frac{R}{\ell_2} \right) \right] + \frac{R^2}{2\ell_2^2} \left[ K_1 \left( \frac{R}{\ell_2} \right)^2 - K_0 \left( \frac{R}{\ell_2} \right) K_2 \left( \frac{R}{\ell_2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.445)$$

$$(6.446)$$

Die Kernenergiedichte einer Schraubenversetzung berechnet sich aus

$$W_{\text{ke}} = \frac{1}{4} H_{ijk} T_{ijk} = \frac{1}{4} (H_{xxy} T_{xxy} + H_{zyz} T_{zyz}). \quad (6.447)$$

Durch anschließende Integration ergibt sich für die Kernenergie der Stufenversetzung wenn diese an den beiden Integrationsgrenzen ausgewertet wird, folgendes Ergebnis

$$E_{\text{ke}} = \int_0^R \int_0^{2\pi} W_{\text{ke}} r \, d\phi \, dr = \frac{\mu b^2}{8\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[ 1 + \frac{R^2}{\ell_2^2} \left( K_0 \left( \frac{R}{\ell_2} \right)^2 - K_1 \left( \frac{R}{\ell_2} \right)^2 \right) \right]. \quad (6.448)$$

Somit bekommt man für die Erzeugung einer Stufenversetzung die gespeicherte Gesamtenergie

$$\begin{aligned} E_{\text{Stufe}} &= E_{\text{el}} + E_{\text{ke}} \\ &= \frac{\mu b^2}{4\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[ \ln \frac{R}{2\ell_2} + \gamma_c + 2K_0 \left( \frac{R}{\ell_2} \right) - \frac{R}{\ell_2} K_0 \left( \frac{R}{\ell_2} \right) K_1 \left( \frac{R}{\ell_2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.449)$$

Die Peach-Koehler Kraft, die eine Stufenversetzung mit dem Burgersvektor  $\mathbf{b}_x$  am Ort  $\mathbf{r} = (0, 0)$  auf eine andere zu ihr parallel ausgerichtete mit dem Burgersvektor  $\mathbf{b}_y$  am Ort  $\mathbf{r} = (R_x, R_y)$  ausübt, ist gleich mit

$$\mathbf{F}(R_x, R_y) = F_x(R_x, R_y) \mathbf{e}_x + F_y(R_x, R_y) \mathbf{e}_y, \quad (6.450)$$

mit den einzelnen Komponenten gegeben durch

$$F_x(R_x, R_y) = - \int \int \sigma_{xy}(x, y) \alpha_{xz}(R_x - x, R_y - y) \, dx \, dy, \quad (6.451)$$

$$F_y(R_x, R_y) = \int \int \sigma_{xx}(x, y) \alpha_{xz}(R_x - x, R_y - y) \, dx \, dy. \quad (6.452)$$

Die Integranden besitzen die folgende Form

$$\sigma_{xy}(x, y) \alpha_{xz}(R_x - x, R_y - y) = \frac{\mu b_x b_y}{2\pi^2 (1 - \nu)} \frac{1}{\ell_2^2} \frac{x}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_2} K_1\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right] K_0\left(\frac{R - r}{\ell_2}\right), \quad (6.453)$$

$$\sigma_{xx}(x, y) \alpha_{xz}(R_x - x, R_y - y) = -\frac{\mu b_x b_y}{2\pi^2 (1 - \nu)} \frac{1}{\ell_2^2} \frac{y}{r^2} \left[ 1 - \frac{r}{\ell_2} K_1\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right] K_0\left(\frac{R - r}{\ell_2}\right). \quad (6.454)$$

Für die Beträge der Abstände im ebenen Fall gilt  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  und  $R - r = \sqrt{(R_x - x)^2 + (R_y - y)^2}$ . Man definiert die folgenden Funktionen

$$f_1(x, y) := \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \ln r + K_0\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right], \quad f_2(x, y) := \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \ln r + K_0\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right], \quad (6.455)$$

$$g(r) := \frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{r}{\ell_2}\right). \quad (6.456)$$

Die zweidimensionale Fourier-Transformation und ihre Inverse sind durch die Formeln

$$\tilde{h}(q_x, q_y) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{i(q_x x + q_y y)} dx dy, \quad (6.457)$$

$$h(x, y) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(q_x, q_y) e^{-i(q_x x + q_y y)} dq_x dq_y. \quad (6.458)$$

gegeben. Aus dem Faltungstheorem folgt für die Fourier-Transformierten der Komponenten der Peach-Koehler Kraft

$$\tilde{F}_1(q_x, q_y) = \frac{2\mu b_x b_y}{1 - \nu} \frac{1}{\ell_2^2} \tilde{f}_1(q_x, q_y) \tilde{g}(q), \quad \tilde{F}_2(q_x, q_y) = \frac{2\mu b_x b_y}{1 - \nu} \frac{1}{\ell_2^2} \tilde{f}_2(q_x, q_y) \tilde{g}(q), \quad (6.459)$$

mit dem Betrag vom  $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$  im Fourier-Raum. Die Funktionen  $\tilde{f}_1$  und  $\tilde{f}_2$  ergeben sich aus folgenden Transformationen [125]

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(q_x, q_y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \ln r + K_0\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right] e^{i(q_x x + q_y y)} dx dy \\ &= -\frac{i q_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \ln r + K_0\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right] e^{i(q_x x + q_y y)} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi \ell_2^2} \frac{i q_x}{q^2 (q^2 + \frac{1}{\ell_2^2})}, \end{aligned} \quad (6.460)$$



$$\begin{aligned}
\tilde{f}_2(q_x, q_y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \ln r + K_0\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right] e^{i(q_x x + q_y y)} dx dy \\
&= -\frac{i q_y}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \ln r + K_0\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right] e^{i(q_x x + q_y y)} dx dy \\
&= \frac{1}{2\pi \ell_2^2} \frac{i q_y}{q^2 (q^2 + \frac{1}{\ell_2^2})}.
\end{aligned} \tag{6.461}$$

Bei der ausgeführten partiellen Integration wurden die Randterme zu Null gesetzt. Die Transformierte von  $\tilde{g}(q)$  ist zylindersymmetrisch und wurde schon für die Schraubenversetzung benutzt. Es ist das gleiche Ergebnis für die Rechnung zu übernehmen. Damit bekommt man aus der Gl. (6.459) die Fourier-Transformierten der Peach-Koehler Kraftkomponenten

$$\tilde{F}_1(q_x, q_y) = \frac{2\mu b_x b_y}{1-\nu} \frac{1}{4\pi^2 \ell_2^4} \frac{i q_x}{q^2 \left(q^2 + \frac{1}{\ell_2^2}\right)^2}, \tag{6.462}$$

$$\tilde{F}_2(q_x, q_y) = \frac{2\mu b_x b_y}{1-\nu} \frac{1}{4\pi^2 \ell_2^4} \frac{i q_y}{q^2 \left(q^2 + \frac{1}{\ell_2^2}\right)^2}. \tag{6.463}$$

Mit Hilfe der Rücktransformation bekommt man für die einzelnen Komponenten der Peach-Koehler Kraft an der Stelle  $r = R$ :

$$\begin{aligned}
F_x(R_x, R_y) &= \frac{b_x b_y \mu}{\pi (1-\nu)} \mathcal{F}^{-1} \left[ -\frac{i q_x}{2\pi} \left( -\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2 + \frac{1}{\ell_2^2}} + \frac{1}{(q^2 + \frac{1}{\ell_2^2})^2 \ell_2^2} \right) \right] \\
&= \frac{b_x b_y \mu}{\pi (1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \ln r + K_0\left(\frac{r}{\ell_2}\right) + \frac{1}{2} \frac{r}{\ell_2} K_1\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right] \Big|_{(x,y)=(R_x, R_y)} \\
&= \frac{b_x b_y \mu}{\pi (1-\nu)} \frac{R_x}{R^2} \left[ 1 - \frac{R}{\ell_2} K_1\left(\frac{R}{\ell_2}\right) - \frac{1}{2} \frac{R^2}{\ell_2^2} K_0\left(\frac{R}{\ell_2}\right) \right],
\end{aligned} \tag{6.464}$$

$$\begin{aligned}
F_y(R_x, R_y) &= \frac{b_x b_y \mu}{\pi (1-\nu)} \mathcal{F}^{-1} \left[ -\frac{i q_y}{2\pi} \left( -\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2 + \frac{1}{\ell_2^2}} + \frac{1}{(q^2 + \frac{1}{\ell_2^2})^2 \ell_2^2} \right) \right] \\
&= \frac{b_x b_y \mu}{\pi (1-\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \ln r + K_0\left(\frac{r}{\ell_2}\right) + \frac{1}{2} \frac{r}{\ell_2} K_1\left(\frac{r}{\ell_2}\right) \right] \Big|_{(x,y)=(R_x, R_y)} \\
&= \frac{b_x b_y \mu}{\pi (1-\nu)} \frac{R_y}{R^2} \left[ 1 - \frac{R}{\ell_2} K_1\left(\frac{R}{\ell_2}\right) - \frac{1}{2} \frac{R^2}{\ell_2^2} K_0\left(\frac{R}{\ell_2}\right) \right].
\end{aligned} \tag{6.465}$$

Die Peach-Koehler Kraft in Polarkoordinaten lautet

$$F_r(R) = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{b_x b_y \mu}{\pi (1-\nu)} \frac{1}{R} \left[ 1 - \frac{R}{\ell_2} K_1\left(\frac{R}{\ell_2}\right) - \frac{1}{2} \frac{R^2}{\ell_2^2} K_0\left(\frac{R}{\ell_2}\right) \right]. \tag{6.466}$$

Da eine Zylindersymmetrie vorliegt, ist  $F_\phi = 0$ . Für einen realistischen Wert von  $\nu = 0.3$ , bekäme man den Vorfaktor  $5 b_x b_y \mu / 2 \pi$ . Nach Gl. (6.426) ist dann  $\gamma = 5/2 \mu$ . Die Kraft (6.466) ist zylindersymmetrisch, d.h. die Kraft zwischen beiden Stufenversetzungen ist richtungsunabhängig. In Wirklichkeit sind die Stufenversetzungen für die Strukturbildung im Material verantwortlich und es werden Versetzungsnetzwerke beobachtet. Unter einer zylindersymmetrischen Kraftverteilung können diese Strukturen nicht gebildet werden und somit ist die Peach-Koehler Kraft (6.466) unphysikalisch. Werden weiterhin alle inneren Längen  $\ell_3 = \ell_2 = \ell_1$  gleich gesetzt, so erhält man wieder die Beziehung (6.426) für den Materialparameter  $\gamma$ , welche zu unphysikalischen Stufenkonfigurationen führte. Da also mit einer inneren Länge nur zylindersymmetrische Konfigurationskräfte möglich sind, braucht man um die physikalische Felder naturgemäß zu beschreiben die zusätzliche innere Länge aus dem Fall *B*. Man kann trotzdem so tun als ob eine Zylindersymmetrie für die Stufe möglich wäre, um ein Gefühl für die Größe der Peach-Koehler Kräfte dieser beiden Versetzungstypen zueinander zu bekommen. Setzt man nämlich  $\ell_2 = \ell_1$  in die Gl. (6.466) ein, dann bekommt man mit der Gl. (6.310) und die Wahl  $\nu = 0.3$  und  $\gamma = 5/2 \mu$  nach Gl. (6.426) folgendes Verhältnis für die Kräfte

$$\frac{F_{\text{Stufe}}(R)}{F_{\text{Schraube}}(R)} = \frac{40}{49} < 1, \quad (6.467)$$

d.h. eine kleinere Konfigurationskraft für die Stufe als für die Schraube, ein unrealistisches Resultat.

#### 6.4.4 Fall *B* : $\gamma \rightarrow \infty$

Dieser Fall ist insofern interessant, da er eine Analogie zur klassischen Elastizitätstheorie mit Momentenspannungen herstellt. Es gilt nämlich

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \ell_3^2 = \frac{a_1}{4\mu(1-\nu)} = \frac{1}{2(1-\nu)} \ell_2^2, \quad (6.468)$$

d.h. die innere Länge  $\ell_3$  ist für bekannte innere Länge  $\ell_2$  immer gegeben. Für die oft in Metallen vorkommende Poissonsche Querkontraktionszahl  $\nu = 0.3$  gilt  $\ell_3 = 0.845 \ell_2$ . Dem Gültigkeitsbereich der Poissonschen Querkontraktionszahl (2.39) entspricht der Bereich  $1/2 \ell_2 \leq \ell_3 \leq \ell_2$  für die innere Länge  $\ell_3$ , d.h. für ein inkompressibles Medium  $\nu = 1/2$ , gilt  $\ell_3 = \ell_2$  und man ist wieder im Fall *A* angesiedelt. Für die Vorfaktoren *A* und *B* ergibt aus den Gln. (6.337) und (6.384) die Beziehung

$$\frac{B}{A} = \frac{\ell_3^2}{\ell_2^2} = \frac{1}{2(1-\nu)}. \quad (6.469)$$

Man erkennt, daß für ein inkompressibles Medium  $B = A$  gilt. Für den Grenzwert  $\gamma \rightarrow \infty$  des Materialparameters  $\gamma$  verschwindet die Rotationkomponente (6.399) der Distorsion und somit auch die Komponenten des Tensors  $K_{ij}^\omega$

$$\omega_z = \beta_{[xy]} = 0, \quad K_{zx}^\omega = 0, \quad K_{zy}^\omega = 0. \quad (6.470)$$

Für die antisymmetrische Spannungskomponente  $\sigma_{[xy]}$  bekommt man aus Gl. (6.393)

$$\sigma_{[xy]} = \frac{\mu b}{\pi} \frac{x}{r^2} \left[ 1 - \frac{\sqrt{2(1-\nu)} r}{\ell_2} K_1 \left( \frac{\sqrt{2(1-\nu)} r}{\ell_2} \right) \right]. \quad (6.471)$$

Entsprechend sind die anderen Spannungskomponenten und Distorsionskomponenten mit den Gln. (6.468) und (6.469) zu modifizieren. Der Nyesche-Krümmungstensor  $K_{ij}$  hängt mit  $K_{ij}^e$  nur noch von der Rotation der elastischen Verzerrung ab, die nur von den Abstandsänderungen zwischen den materiellen Punkten gegeben ist. Man bezeichnet sie auch als Dehnungskrümmung. Im Fall  $\gamma \rightarrow \infty$  kommen also die Hyperspannungen allein durch die Dehnungskrümmung zustande. Aus der Distorsion überlebt nur die Verzerrung und die Versetzungsdichte und somit auch der Nyesche-Krümmungstensor werden eine Funktion von der Rotation der Verzerrung. Für die potentielle Energiedichte eines inkompatiblen elastischen Mediums mit Stufenversetzungen gilt

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} W(\boldsymbol{\beta}, \text{rot} \boldsymbol{\beta}) = W(\mathbf{e}, \text{rote}). \quad (6.472)$$

Solche Energiedichten werden auch für ein kompatibles elastisches Medium mit Momentenspannungen benutzt [84, 85, 128]. Für ein kompatibles Medium gilt  $\alpha_{ij}$  und somit  $K_{ij} = 0$ . Aus der Gl. (A.7) bekommt man

$$\omega_{i,j} = -\epsilon_{ikl} e_{jl,k}, \quad (6.473)$$

d.h. die ortsveränderlichen elastischen Drehungen sind für ein bekanntes Verschiebungsfeld  $u_i$  immer von den Abstandsänderungen abhängig. Ist das elastische Medium inkompatibel, also existieren im Material Versetzungen, dann kann es unter Umständen auch ortsveränderliche Drehungen  $\omega_{i,j}$  im Material geben, die aus einer reinen relativen starren Rotation benachbarter Volumenelemente ergeben. Bei bestimmten regelmäßigen Versetzungsanordnungen von mehreren Stufenversetzungen [40], ist ein makroskopischer, spannungsfreier Kraftzustand  $\bar{\sigma}_{ij} = 0$  möglich. Der waagerechte Schritt bedeutet eine Mittelung von allen einzelnen Spannungsfeldern der Stufenversetzungen über einem makroskopischen Flächenelement. Die regelmäßige, periodische Anordnung ist so gegeben, daß die einzelnen Dilatations und Kompressionsfelder um die Versetzungen sich gegenseitig anihilieren. Das Kristallgitter erfährt also eine spannungsfreie Gitterverbiegung mit  $\bar{H}_{ijk,k} = 0$ . Diese gegenseitige Wirkung der Stufenversetzungen verursacht einen verzerrungsfreien Zustand  $e_{ij} = 0$ , also entsprechend auch  $\bar{K}_{ij}^e = 0$  und die zugehörige verzerrungsfreie Gitterverbiegung  $\bar{K}_{ij} = \bar{K}_{ij}^\omega$  des Kristalls ruft die makroskopischen, spannungsfreie und divergenzfreie Momentenspannungen  $\bar{H}_{ijk,k} = 0$  hervor. Die Mittelung der langreichweitigen Biegekrümmungen  $K_{zx}^\omega, K_{zy}^\omega$  des Kristalls aus den Gln. (6.400) und (6.401) über ein makroskopisches Volumenelement, welches eine verzerrungsfreie Anordnung von Stufenversetzungen beinhaltet, gibt dann die makroskopischen Nyeschen-Krümmungen  $\bar{K}_{zx} = \bar{\alpha}_{zx}, \bar{K}_{zy} = \bar{\alpha}_{zy}$  an, die als Schnittgrößen an einer infinitesimalen, makroskopischen Schnittfläche erscheinen. Für eine einzelne Stufenversetzung ist natürlich so ein Zustand nicht möglich, da dort immer  $\sigma_{[xy]} \neq 0$  herrschen muß [129].

### 6.4.5 Fall C: $\ell_1 = \ell_2$ , $\gamma = 0$

Das Momentengleichgewicht für den antisymmetrischen Anteil  $H_{[ij]k}$  der Hyperspannungen lautet

$$D_k H_{[ij]k} + \sigma_{[ij]} = \sigma_{[ij]}^0. \quad (6.474)$$

Für  $\gamma = 0$  geht dieses Gleichgewicht mit verschwindenden antisymmetrischen Spannungen  $\sigma_{[ij]} = \sigma_{[ij]}^0 = 0$  verloren. Es sind äußere Momente dann nötig, um das Gleichgewicht weiterhin aufzubewahren. Asymmetrische Spannungen sind also immer erforderlich, um das Momentengleichgewicht zu erfüllen. Für ein Materialgesetz mit symmetrischen Spannungen  $\gamma = 0$ , ist  $B = 0$  und wenn dieser Wert für  $B$  in die Gln. (6.387)–(6.391) für die Spannungskomponenten eingesetzt wird, ergeben sich die symmetrischen Spannungen

$$\sigma_{xx} = -A \frac{y}{r^4} \left\{ (y^2 + 3x^2) + \frac{4\ell_1^2}{r^2} (y^2 - 3x^2) - 2y^2 \frac{r}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) - 2(y^2 - 3x^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right\} \quad (6.475)$$

$$\sigma_{yy} = -A \frac{y}{r^4} \left\{ (y^2 - x^2) - \frac{4\ell_1^2}{r^2} (y^2 - 3x^2) - 2x^2 \frac{r}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) + 2(y^2 - 3x^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right\} \quad (6.476)$$

$$\sigma_{xy} = A \frac{x}{r^4} \left\{ (x^2 - y^2) - \frac{4\ell_1^2}{r^2} (x^2 - 3y^2) - 2y^2 \frac{r}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) + 2(x^2 - 3y^2) K_2\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right\} \quad (6.477)$$

$$\sigma_{zz} = -2\nu A \frac{y}{r^2} \left\{ 1 - \frac{r}{\ell_1} K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \right\}. \quad (6.478)$$

Damit sind auch die Ergebnisse der Eichfeldtheorie für symmetrische Spannungen [10] mit der inneren Länge  $\ell_2 = \ell_1 = a_1/2\mu$  reproduzierbar. Ein Vergleich dieser Ergebnisse mit der Gradiententheorie der Elastizität vom Helmholtz-Typ [131] zeigt, daß die Gleichungen für die Spannungskomponenten die gleiche Form besitzen. Nur die inneren Längen unterscheiden sich. Die Distorsionen sind durch die Verzerrungen

$$\beta_{xx}^0 = e_{xx}^0, \quad \beta_{yy}^0 = e_{yy}^0, \quad \beta_{xy}^0 = \beta_{yx}^0 = e_{xy}^0, \quad \beta_{[xy]}^0 = 0. \quad (6.479)$$

gegeben.

## 6.5 Die mikromorphe Elastizität als Versetzungstheorie.

In dem Kapitel über Elastizität mit einer Mikrostruktur hatten wir drei kinematische Größen eingeführt. Zur Erinnerung möchten wir sie kurz auflisten

$$\text{Mikroverzerrung : } e_{ij} = \psi_{(ij)}, \quad (6.480)$$

$$\text{Relative Deformation : } \gamma_{ij} = u_{i,j} - \psi_{ij}, \quad (6.481)$$

$$\text{Mikrodeformation : } \kappa_{ijk} = \psi_{ij,k}. \quad (6.482)$$

Aus diesen hat man die entsprechenden zugehörigen dualen Größen der Mikrospannung  $s_{ij}$ , der relativen Spannung  $t_{ij}$  und der Hyperspannung  $m_{ijk}$  hergeleitet. Es stellt sich nun die Frage, ob aus den oberen kinematischen Deformationsgrößen, die kinematischen Größen der Eichfeldtheorie der Versetzungen reproduzierbar ist. Für den statischen Fall wurde gezeigt, daß es möglich ist. Zu diesem Zweck werden für die kinematischen Gln. (6.480)–(6.482) eines kompatiblen elastischen, mikromorphen Mediums folgende Substitutionen ausgeführt

$$e_{ij} \rightarrow -\phi_{(ij)} = \beta_{(ij)}^{\text{pl}}, \quad (6.483)$$

$$\gamma_{ij} \rightarrow \beta_{ij} = u_{i,j} + \phi_{ij}, \quad \psi_{ij} \rightarrow -\phi_{ij} = \beta_{ij}^{\text{pl}} \quad (6.484)$$

$$\kappa_{ijk} \rightarrow T_{ijk} = \psi_{i[j,k]} = \phi_{ik,j} - \phi_{ij,k}. \quad (6.485)$$

Man interpretiert jetzt die Mikrodeformation als die plastische Distorsion. Aus der elastischen Mikroverzerrung wird die plastische Verzerrung eines elastischen Mediums mit Versetzungen. Damit ist diese Größe keine Zustandsgröße mehr. Aus der relativen Distorsion wird die elastische Distorsion als neue Zustandsgröße. Schließlich bekommt man aus dem Mikrodeformationsgradienten durch eine Antisymmetrisierung in den letzten zwei Indizes die Cartansche Torsion. Somit wird aus dem Gradienten die Rotation gebildet. Man hat gerade gesehen, daß die kinematischen Gleichungen eines mikromorphen elastischen Mediums durch die Substitutionen (6.483)–(6.485) in solche der Eichfeldtheorie der Versetzungen überführt werden können. Aus der potentiellen Energie eines kompatiblen mikromorphen Mediums ergibt nun die entsprechende potentielle Energie der statischen Eichfeldtheorie

$$W(\mathbf{e}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\kappa}) \rightarrow W(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{T}). \quad (6.486)$$

Wir wissen, daß die Gleichungen der mikromorphen Elastizität ihren komplexen Charakter durch die Materialgesetze bekommen. In dieser Theorie besitzt nämlich der Materialtensor  $D_{ijklmn}$  für das lineare Hookesche Gesetz zwischen den Hyperspannungen  $m_{ijk}$  und dem Gradienten der Mikrodeformation  $\kappa_{lmn}$  nur die Symmetrie  $D_{ijklmn} = D_{lmnij k}$ . Diese Symmetrie reduziert die Anzahl der Materialparameter von fünfzehn auf elf. Durch die Antisymmetrie in den letzten zwei Indizes von  $\kappa_{ijk}$  sieht man sofort aus der Materialgleichung (3.116), daß  $\tau_1 = \tau_4 = \tau_5 = 0$ . Durch einen weiteren Vergleich mit den Gln. (6.35), (6.36) und (6.30) ergeben sich folgende Relationen zwischen den Materialkonstanten

$$c_1 = A_1 = \tau_7 - \tau_9, \quad (6.487)$$

$$c_2 = A_5 + A_{13} = 2(\tau_8 - \tau_{10}), \quad (6.488)$$

$$c_3 = A_8 - A_9 = \tau_3 - \tau_6, \quad (6.489)$$

mit den entsprechenden Beziehungen zwischen den verschiedenen  $A_i$  und  $\tau_j$  Materialkonstanten

$$A_1 = \tau_7 - \tau_9, \quad A_5 = \tau_8 - \tau_{11}, \quad A_8 = \tau_3 - \tau_2, \quad (6.490)$$

$$A_9 = \tau_6 - \tau_2, \quad A_{13} = \tau_8 - \tau_{10}, \quad \tau_{11} = \tau_{10}. \quad (6.491)$$

Für die Spannungen  $t_{kl}$ ,  $s_{kl}$  und Momentenspannungen  $m_{klm}$  aus der Gl. (3.109) gilt jetzt

$$t_{kl} \rightarrow \sigma_{kl}, \quad s_{kl} \rightarrow 0, \quad m_{klm} \rightarrow H_{klm}, \quad (6.492)$$

d.h. der Mikrospannungstensor  $s_{kl} = 0$  muß verschwinden, da die Mikroverzerrung nach Ausführung der Substitution (6.483) keine Zustandsgröße mehr ist. Aus der Konstitutivgleichung (3.115) bekommt man die zusätzliche Gleichungen für die Materialparameter

$$\lambda + \nu = 0, \quad \lambda + 2\nu + \tau = 0, \quad \mu + \sigma = 0, \quad 2(\mu + 2\sigma + \eta) = 0. \quad (6.493)$$

Man substituiert noch  $\kappa = \gamma$  für den Spannungstensor  $t_{kl}$ . Vor dem Tensor  $\gamma_{lk}$  muß noch  $\gamma$  subtrahiert werden. Verändert man entsprechend durch obige Wahl der Materialkonstanten die Konstitutivgleichungen (3.114)–(3.116), so gelangt man auch zum linearen statischen Gleichungssystem der Eichfeldtheoretischen Versetzungstheorie mit den insgesamt zwölf unbekannten Größen  $u_i, \phi_{ij}$ . Die in diesem Abschnitt erwähnte Herleitung einer Versetzungstheorie aus einer mikromorphen Theorie erfolgte zum größten Teil in der Arbeit von Eringen und Claus [130]. Ein Unterschied besteht darin, daß zur Zeit als diese Arbeit erschien, anstatt der Mikroverzerrung (6.480) die Makroverzerrung  $e_{ij} = u_{(i,j)}$  für die Konstitutivgleichungen benutzt wurde. Später erkannte Eringen [71], daß für die potentielle Energie eines mikromorphen Mediums zusätzlich zur relativen Deformation (6.481) und Mikrodeformation (6.482), die Mikroverzerrung (6.480) als dritte kinematische Größe und nicht die Makroverzerrung die entscheidende Rolle spielt.

Die dynamischen Gleichungen der Eichfeldtheorie sind aus der dynamischen mikromorphen Elastizität nicht herleitbar. Die Trägheitsglieder sind durch  $\rho \dot{u}_i$  und  $\rho J \dot{\phi}_{ij}$  gegeben. Der Versetzungsstromdichtestrom  $I_{ij}$  entspricht aber nach Gl. (6.15) im allgemeinen nicht nur der plastischen Distorsionsgeschwindigkeit. Dies wurde nur gelten wenn der Gradient des dynamischen Eichpotentials  $\varphi_{i,j} = 0$  verschwinden wurde. Zusätzlich besitzt im allgemeinen die Geschwindigkeit des materiellen Punktes außer dem elastischen  $\rho \dot{u}_i$  noch einen plastischen Geschwindigkeitsanteil  $\rho \varphi_i$ , d.h. beide Trägheitsglieder unterscheiden sich. Während also für die dynamische mikromorphe Elastizität weiterhin zwölf unbekannten Variablen gibt, erhöht sich diese Anzahl in der dynamischen Eichfeldtheorie wegen dem vektorwertigen Eichpotential  $\varphi_i$  auf fünfzehn. Wie schon gezeigt wurde, führt die Variation der Lagrangedichte nach dieser zusätzlichen Variablen  $\varphi_i$  auf die Gl. (6.23), die in der dynamischen mikromorphen Elastizität nicht vorhanden ist.

## 6.6 Das dynamische anti-ebene Problem

In der klassischen Elastizitätstheorie gab Frank [132, 133] als erster eine Lösung für das Verschiebungsfeld um eine gleichmäßig bewegte Schraubenversetzung. Eshelby [134] gab zur gleichen Zeit eine Lösung für die gleichmäßig bewegte Stufenversetzung. In der Dynamik wurde lange die Meinung vertreten, daß der Schall eine unüberwindbare

Grenzgeschwindigkeit für die Bewegung einer Versetzung in einem Kristall darstellt. In der dynamischen Eichfeldtheorie läßt sich Sharma und Zhang [135] aus der Lorentz-Invarianz der Bewegungsgleichung für eine Schraubenversetzung in die Irre führen. Er leitet eine zweite, höher liegende Grenzgeschwindigkeit als die Schallgeschwindigkeit ab, die er im klassischen Sinn als unüberwindbar ansieht. Die von Gumbsch und Gao [136] numerische Berechnung gab Indiz dafür, daß das Übertreten einer Bewegung in den Überschallbereich möglich ist. Somit weist die Dynamik eine Parallele zur Gasydynamik auf. Ähnlich wie dort verändern die Bewegungsgleichungen für die Versetzung beim Übergang vom Unterschall zum Überschall ihren elliptischen Charakter und werden hyperbolisch. Damit verliert für dieses Problem die Lorentz-Invarianz ihre Bedeutung. Die Bewegungsgleichung für eine Stufenversetzung ist nur Galilei-invariant. In der klassischen, dynamischen inkompatiblen Elastizität wurde diese Tatsache schon früh von Eshelby [137, 138] und Weertman [139, 140] erkannt. Wir möchten die dynamischen Feldgleichungen der Eichfeldtheorie für eine gleichmäßig bewegte Schraubenversetzung untersuchen. Wir beschränken uns dabei auf eine Bewegung im Unterschall.

Im Fall des anti-ebenen Problems für eine Schraubenversetzung bekommt man aus den Euler-Lagrange Gln. (6.215)–(6.217) für die Distorsionsfelder  $\beta_{zx}$ ,  $\beta_{zy}$  und das Geschwindigkeitsfeld  $v_z$  die folgenden Bewegungsgleichungen

$$\rho \dot{v}_z - (\mu + \gamma) (\beta_{zx,x} + \beta_{zy,y}) = 0, \quad (6.494)$$

$$\rho v_z + (d_2 + d_3) (\dot{\beta}_{zx,x} + \dot{\beta}_{zy,y} - \Delta v_z) = \rho v_z^0, \quad (6.495)$$

$$(d_2 - d_3) (\ddot{\beta}_{zx} - \dot{v}_{z,x}) + c_2 (\beta_{zx,yy} - \beta_{zy,xy}) + (\mu - \gamma) \beta_{zx} = (\mu - \gamma) \beta_{zx}^0, \quad (6.496)$$

$$(d_2 + d_3) (\ddot{\beta}_{zx} - \dot{v}_{z,x}) + c_1 (\beta_{zy,xy} - \beta_{zx,yy}) + (\mu + \gamma) \beta_{zx} = (\mu + \gamma) \beta_{zx}^0, \quad (6.497)$$

$$(d_2 - d_3) (\ddot{\beta}_{zy} - \dot{v}_{z,y}) + c_2 (\beta_{zy,xx} - \beta_{zx,xy}) + (\mu - \gamma) \beta_{zy} = (\mu - \gamma) \beta_{zy}^0, \quad (6.498)$$

$$(d_2 + d_3) (\ddot{\beta}_{zy} - \dot{v}_{z,y}) + c_1 (\beta_{zx,xy} - \beta_{zy,xx}) + (\mu + \gamma) \beta_{zy} = (\mu + \gamma) \beta_{zy}^0. \quad (6.499)$$

Die Gl. (6.494) beschreibt die Impulsbilanzgleichung (6.215) für  $v_z$ , die Gl. (6.495) ergibt sich aus der ersten Bilanzgleichung (6.216) für den Versetzungsimpuls. Diese kann aus einer dynamischen mikromorphen Theorie nicht hergeleitet werden. Die letzten vier Gln. (6.496)–(6.499) resultieren aus der zweiten Bilanzgleichung (6.217) für die Hyperspannungen. Man setzt die anti-ebene Bedingung (6.240) für eine Schraubenversetzung in die Gln. (6.496)–(6.499) ein. Subtrahiert man dann die aus den Gln. (6.496) und (6.497) resultierenden Gln. voneinander, so erhält man die folgende Gleichung

$$\left[ (d_2 - d_3) \frac{\mu + \gamma}{\mu - \gamma} - (d_2 + d_3) \right] (\ddot{\beta}_{zx} - \dot{v}_{z,x}) = 0, \quad (6.500)$$

aus welcher man, im allgemeinen Fall für  $\ddot{\beta}_{zx} - \dot{v}_{z,x} \neq 0$ , folgende Bedingung für die Materialparameter  $d_2$  und  $d_3$

$$d_2 - d_3 = \frac{\mu - \gamma}{\mu + \gamma} (d_2 + d_3), \quad (6.501)$$

erhält. Aus dieser Bedingung sieht man, daß für symmetrische Spannungen  $\gamma = 0$  der

Materialparameter  $d_3 = 0$  verschwinden muß. Mit der Wahl (6.501) für die Materialparameter verändern sich die Bewegungsgleichungen zu

$$\rho \dot{v}_z - (\mu + \gamma) (\beta_{zx,x} + \beta_{zy,y}) = 0, \quad (6.502)$$

$$\rho v_z + (d_2 + d_3) (\dot{\beta}_{zx,x} + \dot{\beta}_{zy,y} - \Delta v_z) = \rho v_z^0, \quad (6.503)$$

$$(d_2 + d_3) (\ddot{\beta}_{zx} - \dot{v}_{z,x}) + c_1 (\beta_{zy,xy} - \beta_{zx,yy}) + (\mu + \gamma) \beta_{zx} = (\mu + \gamma) \beta_{zx}^0, \quad (6.504)$$

$$(d_2 + d_3) (\ddot{\beta}_{zy} - \dot{v}_{z,y}) + c_1 (\beta_{zx,xy} - \beta_{zy,xx}) + (\mu + \gamma) \beta_{zy} = (\mu + \gamma) \beta_{zy}^0. \quad (6.505)$$

Mit Hilfe der Impulsgleichung (6.502) können die Terme  $\dot{v}_{z,x}$  und  $\dot{v}_{z,y}$  in den Gln. (6.504) und (6.505) eliminiert werden. Zusätzlich können durch die Impulsgleichung die räumlichen Ableitungen in den Distorsionen in der Bewegungsgleichung für den Versetzungsimpuls (6.503) eliminiert werden. Dadurch entsteht eine partielle Differentialgleichung, die nur die Geschwindigkeit  $v_z$  beinhaltet. Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem für die Feldvariablen  $v_z$ ,  $\beta_{zx}$  und  $\beta_{zy}$

$$\tau^2 \ddot{v}_z + \ell_d^2 \Delta v_z - v_z = v_z^0, \quad (6.506)$$

$$\tau^2 \ddot{\beta}_{zx} + (\ell_1^2 - \ell_d^2) \beta_{zy,xy} - \ell_d^2 \beta_{zx,xx} - \ell_1^2 \beta_{zx,yy} + \beta_{zx} = \beta_{zx}^0, \quad (6.507)$$

$$\tau^2 \ddot{\beta}_{zy} + (\ell_1^2 - \ell_d^2) \beta_{zx,xy} - \ell_d^2 \beta_{zy,yy} - \ell_1^2 \beta_{zy,xx} + \beta_{zy} = \beta_{zy}^0, \quad (6.508)$$

mit der inneren charakteristischen Zeit  $\tau$  und der inneren dynamischen Länge  $\ell_d$ , die folgendermaßen definiert sind

$$\tau^2 := \frac{d_2 + d_3}{\mu + \gamma}, \quad \ell_d^2 := \frac{d_2 + d_3}{\rho}. \quad (6.509)$$

Die Gln. (6.506)–(6.508) beschreiben die allgemeine Dynamik für eine Schraubenversetzung mit der Versetzungslinie entlang der  $z$ -Achse. Wir betrachten jetzt eine in  $x$ -Richtung gleichmäßig bewegte Schraubenversetzung. Für einen in  $x$ -Richtung mit der Schraubenversetzung gleichmäßig mitbewegten Beobachter werden die Bewegungsgleichungen (6.506)–(6.508) stationär. Man führt dabei entlang der  $x$ -Achse die Galilei-Transformation

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z = z', \quad v = \text{const.} \quad (6.510)$$

Für die zeitliche Ableitungen bekommt man aus der Transformation (6.510)

$$(\dot{\phantom{x}}) = -v \frac{\partial}{\partial x'}, \quad (\ddot{\phantom{x}}) = v^2 \frac{\partial}{\partial x'^2}. \quad (6.511)$$

Damit bekommt man die stationären Bewegungsgleichungen

$$\left[ 1 - \left( \frac{v\tau}{\ell_d} \right)^2 \right] v_{z,x'x'} - v_{z,yy} - v_z = v_z^0, \quad (6.512)$$

$$[(v\tau)^2 - \ell_d^2] \beta_{zx',x'x'} - \ell_1^2 \beta_{zx',yy} + (\ell_1^2 - \ell_d^2) \beta_{zy,x'y} + \beta_{zx'} = \beta_{zx'}^0, \quad (6.513)$$

$$[(v\tau)^2 - \ell_1^2] \beta_{zy,x'x'} - \ell_d^2 \beta_{zy,yy} + (\ell_1^2 - \ell_d^2) \beta_{zx',x'y} + \beta_{zy} = \beta_{zy}^0. \quad (6.514)$$

Die Gleichung (6.512) für die Geschwindigkeit  $v_z$  ist eine modifizierte Helmholtz Gleichung. Das liegt an dem Vorfaktor von  $v_{z,x'x'}$ . Nur im Spezialfall  $v\tau \ll \ell_d$  wurde man eine Helmholtz Gleichung bekommen. Die Gln. (6.513)–(6.514) für die Distorsionen  $\beta_{zx}$  und  $\beta_{zy}$  sind gekoppelt. Eine Entkoppelung kann nur für den Fall  $\ell_1^2 = \ell_d^2$  stattfinden.



# Kapitel 7

## Zusammenfassung

Ausgehend von den kontinuierlichen Symmetrien des Wirkungsfunktionalen für ein elastisches Medium mit einer deformierbaren Mikrostruktur wurden nach den Emmy Noetherschen Theorem Erhaltungssätze und Bilanzgleichungen hergeleitet. Für die Translations und Rotationssymmetrien bekam man analog zur homogenen und isotropen klassischen Elastizität die Divergenzfreiheit des Energie-Impuls Tensors und des Drehimpulstensors. Der Eshelbysche Spannungstensor bekommt in elastischen Materialien mit Mikrostruktur zusätzliche Terme. Ist die Mikrostruktur ein starrer Mikrokörper, so erscheint im Vergleich zum Eshelbyschen Tensor der klassischen Elastizität, noch das Produkt der Momentenspannungen mit dem Gradienten der Mikrorotation. Ist für die Mikrostruktur eine homogene Dilatation zugelassen, so kommt ein Produkt des Vektors der Mikrodilatation mit dem Gradienten einer skalaren Funktion, welche die Dilatation beschreibt, hinzu. Anschließend wurde gezeigt, daß im allgemeinsten Fall einer beliebig deformierbaren Mikrostruktur der neue Term als Produkt des Mikrodilationsgradienten mit einem Tensor dritter Stufe, den Hyperspannungstensor, dargestellt wird. Die Isotropiebedingungen für diese Kontinua wurden für den Drehimpulstensor berechnet. Aus den lokalen Erhaltungssätzen wurden mittels des Gaußschen Integralsatzes die integrale Erhaltungsgrößen als  $J_k$ - und  $L_k$ - Integrale angegeben. Der Dilatationsstrom wird in elastischen Medien mit einer Mikrostruktur gebrochen. Das  $M$ -Integral verschwindet nicht wie in der klassischen Elastizität. Für das Kontinuum mit einer Dilatationsstruktur und das mikromorphe Kontinuum ist dieses ein Maß für die Konfigurationsarbeit.

Man untersuchte die Struktur der Erhaltungssätze und Bilanzgleichungen in der Gradientenelastizität. Man bekam analoge Ergebnisse. Ein Unterschied besteht in der Herleitung der allgemeinen Formeln für die Ströme. Die in dieser Arbeit untersuchte Lagrangedichte der Gradientenelastizität beinhaltet in sich die zweite Ableitung des Verschiebungsfeldes, im Gegensatz zur mikromorphen Elastizität, wo nur die ersten Ableitungen des Verschiebungsfeldes und der Mikrodeformation auftreten. Die einzelnen Ströme weisen eine ähnliche Struktur wie die in der Elastizität mit Mikrostruktur. Der Eshelbysche Spannungstensor bekommt im Vergleich zur klassischen Elastizität zwei zusätzliche Terme. Der erste Term erscheint als Produkt des Verschiebungsgradienten mit der Divergenz des Hyperspannungstensors. Der zweite Term enthält analog zur

Elastizität mit Mikrostruktur das Produkt des Hyperspannungstensors mit der zweiten Ableitung des Verschiebungsfeldes. Für den Symmetriebruch des Dilatationsstroms ist die Struktur sehr ähnlich. Die zum Hyperspannungstensor kanonisch konjugierte Größe ist nicht der Mikrodistorsionsgradient sondern die zweite Ableitung des Verschiebungsfeldes.

Zur Beschreibung eines inkompatiblen elastischen Mediums kommt durch die Verletzung der Inkompatibilitätsbedingungen die Versetzungsdichte als neue kinematische Größe zur elastischen Distorsion neu hinzu. Nach der klassischen Elastizität geht anstatt des Verschiebungsgradienten die elastische inkompatible Distorsion ins Materialgesetz ein. Mit Hilfe der additiven Zerlegung des totalen Verschiebungsgradienten taucht zur Bestimmung des Verschiebungsfeldes in der Gleichgewichtsbilanzgleichung die plastische Distorsion auf. Die Eichfeldtheorie der Versetzungen liefert eine aus ersten Prinzipien geschlossene Theorie. Aus der Lagrangedichte der Elastizität erzeugte man nach Ausführung der minimalen Kopplung die Lagrangedichte der inkompatiblen Elastizität. Zu dieser addierte man eine Lagrangedichte, die den Einfluß des Versetzungskernes berücksichtigt. Die aus diesen beiden Teilen zusammengesetzte Lagrangedichte stellte die Grundlage für ein System aus der gleichen Anzahl von Bewegungsgleichungen wie für die unbekannten Felder, das Verschiebungsfeld und die beiden Eichfelder. Dieses kann für bekannte Anfangsbedingungen oder Randbedingungen gelöst werden. Der Versetzungsanteil der Lagrangedichte beschreibt dabei den Einfluß des Versetzungskernes auf die Verzerrung und Spannungsverteilung im elastischen Medium. Beschrieben durch die kinematische Größe des Versetzungsdichtetensors ruft Spannungen höherer Ordnung, sogenannte Hyperspannungen hervor. Man untersuchte die kanonische und eichinvariante Ströme für die Teilsysteme und das gesamte aus dem elastoplastischen Anteil und einen den Einfluß des Versetzungskernes berücksichtigenden Anteil.

Im Vergleich zu den vorherigen Arbeiten in der Eichfeldtheorie der Versetzungen, wählten wir für ein isotropes elastisches Material mit Versetzungen das allgemeinste Materialgesetz für den Spannungs und Hyperspannungstensor, welches die Asymmetrie in den Spannungen berücksichtigt. Aus der Bedingung für die positive Definitheit der potentiellen Energie bekam man Ungleichungen für die sechs Materialparametern und hat die Notwendigkeit für die Asymmetrie der Spannungen gezeigt. Es wurde anhand des Beispiels einer einzelnen Schrauben und Stufenversetzung Lösungen aus dieser Theorie ermittelt. Im Vergleich zu der Eichfeldtheorie mit symmetrischen Spannungen blieb jetzt die kinematische Größe der elastischen Rotation nicht unbestimmt. Zur Lösung des statischen Gleichungssystems benutzten wir den Mindlinschen Spannungsfunktionsansatz welcher sich zur Entkopplung der Gleichungen als geeignet erwies.

Aus der Behandlung des anti-ebenen und ebenen Problems ergaben sich zwei charakteristische, innere Längen. Aus dem anti-ebenen Problem für die Schraubenversetzung ergab sich die gleiche innere Länge wie im Fall der symmetrischen Eichfeldtheorie. Die Asymmetrie offenbart sich lediglich in den Vorfaktoren für die gesuchten Distorsionsfelder und Spannungsfelder. Für die Stufenversetzung hat man eine neue innere Länge bekommen. Somit lieferte die Eichfeldtheorie mit asymmetrischen Spannungen zwei innere Längen geeignet entsprechend für Torsions und Biegeprobleme. Die inhomogene Bilanzgleichung für die Spannungen hergeleitet unter Benutzung des

inversen Materialgesetzes wird mit einem Spannungsfunktionsansatz gelöst. Man bekommt eine durch den Versetzungskern modifizierte Lösung, welche auch das richtige asymptotische klassische Fernverhalten zeigt. Die Lösungen nach der klassischen Elastizitätstheorie wurden für asymmetrische Spannungen berechnet. Die Distorsionen und Spannungen steigen vom Wert Null auf der Versetzungslinie bis zu einem maximalen Wert in unmittelbarer Entfernung vom Kernradius. Dann fallen sie wieder ab und passen sich schließlich asymptotisch dem klassischen Abklingverhalten an. Somit werden auch die Spannungen regularisiert. Man berechnete die Versetzungsdichte und Hyperspannungen für beide Probleme. In den allgemeinen Lösungen für die Stufenversetzung kommen zwei innere Längen vor und die Funktion der Versetzungsdichte zeigt im Vergleich zur symmetrischen Eichfeldtheorie keine Zylindersymmetrie mehr. Man hat die Peach-Koehler Kraft zwischen zwei geraden, in  $z$ -Richtung gerichteten Schraubenversetzungen berechnet. Die Rechnung wurde mit Ergebnissen aus anderen Theorien, wie die aus der klassischen und der nichtlokalen Elastizität verglichen.

Schließlich gab man einen Ausblick über die Bewegungsgleichungen der dynamischen Eichfeldtheorie. Man untersuchte das anti-ebene Problem einer Schraubenversetzung. Man bekam eine dynamische Länge und eine innere charakteristische Zeit. Für die gleichmäßig bewegte Schraubenversetzung ergab sich aus der Galillei-Transformation ein stationäres Gleichungssystem aus gekoppelten modifizierten Helmholtz Gleichungen.



# Anhang A

## A.1 Krümmungstensoren

Der Ausgangspunkt ist die Gl. (5.18) für den Versetzungsdichtetensor als die Rotation der elastischen Distorsion

$$\boldsymbol{\alpha} = \text{rot} \boldsymbol{\beta}, \quad (\text{A.1})$$

Symbolisch hängt der Versetzungsdichtetensor  $\boldsymbol{\alpha}$  mit der Anwendung des Rotationsoperators von rechts auf die Distorsion

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \times \nabla, \quad \alpha_{ij} = \epsilon_{jkl} \beta_{il,k}. \quad (\text{A.2})$$

Man setzt die additive Zerlegung (2.16) für die elastische Distorsion in die Gl. (5.18) ein und schreibt dabei die elastische Rotation durch ihren equivalenten axialen Vektor aus Gl. (2.18) um, so bekommt man für den Versetzungsdichtetensor die Beziehung

$$\alpha_{ij} = \omega_{j,i} - \omega_{k,k} \delta_{ij} + \epsilon_{jkl} e_{il,k}. \quad (\text{A.3})$$

Aus Gl. (A.3) ergibt auch die Spur des Versetzungsdichtetensors

$$\alpha_{kk} = -2 \omega_{k,k}. \quad (\text{A.4})$$

Man multipliziert die Gl. (A.4) mit  $\delta_{ij}/2$  und subtrahiert das Resultat anschließend von der Gl. (A.3). Bildet man die Transponierte, dann erhält man folgendes Ergebnis

$$K_{ij} = K_{ij}^{\omega} + K_{ij}^e, \quad (\text{A.5})$$

mit den eingeführten Tensoren

$$K_{ij} := \alpha_{ji} - \frac{1}{2} \alpha_{kk} \delta_{ij}, \quad K_{ij}^{\omega} := \omega_{i,j}, \quad K_{ij}^e := \epsilon_{ikl} e_{jl,k}. \quad (\text{A.6})$$

Den Tensor  $K_{ij}^{\omega}$  findet man in einer Theorie mit Momentenspannungen (Couple stress). Er ist als der Gradient des axialen Vektors  $\omega_i$  der lokalen Rotation des Kontinuums definiert. Im Falle einer kompatiblen Deformation ist  $\alpha_{ij} = 0$  und somit auch  $K_{ij} = 0$ , d.h. aus Gl. (A.5) folgt  $K_{ij}^{\omega} = -K_{ij}^e$ . Diese Beziehung gilt auch in der kompatiblen

linearen Elastizitätstheorie mit Momentenspannungen. Aus Integration der Gl. (A.3) ergibt sich die lokale Rotation (2.17), (2.18) eines kompatiblen Kontinuums. Der Tensor  $K_{ij}$  wird Nyescher Tensor genannt [113]. Er hängt nach Gl. (A.6) nur vom inkompatiblen Maß des Versetzungsdichtetensors. Bei einem Verzerrungsfreien Zustand ( $e_{ij} = 0$ ), bestimmt er alleine die lokale Rotation des Kristallgitters. Im allgemeinen Fall hängt nach Gl. (A.5)  $K_{ij}^\omega$  mit  $K_{ij}$  über die elastische Rotation der Verrzerrung  $K_{ij}^e$  zusammen. Für das Differential des axialen Rotationsvektors folgt aus Gl. (A.5) und Gl. (A.6)

$$d\omega_i = K_{ij} dx_j - \epsilon_{ikl} e_{jl,k} dx_j. \quad (\text{A.7})$$

Für ein kompatibles elastisches Rotationsfeld verlangt man

$$\oint_C d\omega = 0, \quad (\text{A.8})$$

d.h.  $d\omega$  ist ein totales Differential. Um die Bedingung (A.8) zu erfüllen gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder verschwindet die Rotation an sich für jeden einzelnen der Summanden auf der rechten Seite der Gl. (A.7)

$$\epsilon_{jkm} \epsilon_{iln} e_{mn,kl} = 0, \quad \epsilon_{jkm} K_{im,k} = 0, \quad (\text{A.9})$$

oder aber verschwindet die Gesamtsumme als

$$-\epsilon_{jkm} \epsilon_{iln} e_{mn,kl} + \epsilon_{jkm} K_{im,k} = 0. \quad (\text{A.10})$$

In symbolischer Form geschrieben, lautet die Gl. (A.10)

$$\mathbf{E} = -\text{in} \mathbf{K} + \text{rot} \mathbf{K} = 0, \quad (\text{A.11})$$

dabei bezeichnet  $E_{ij}$  den Einsteinschen Tensor, der im dreidimensionalen Fall äquivalent mit dem Riemannschen Tensor ist

$$E_{ij} = \frac{1}{4} \epsilon_{inm} \epsilon_{jlk} R_{nmlk}, \quad R_{nmlk} = \epsilon_{inm} \epsilon_{jlk} E_{ij}. \quad (\text{A.12})$$

Im linearen Fall gilt die Gl. (A.11), d.h. die Riemannsche Krümmung verschwindet, es existiert also ein Fernparallelismus, welcher die globale Kristallstruktur garantiert.

## A.2 Cartansche Torsion

Die Bestimmung des Schließungsfehlers als Burgers-Vektor  $\mathbf{b}$  in einem Kristall, der Versetzungen beinhaltet konnte mit Hilfe des Burgers oder Frankeschen Umlaufs um die Versetzung identifiziert werden. Man kann zu diesem Schließungsfehler auch mit Hilfe der Differentialgeometrie von Mannigfaltigkeiten gelangen. Diesen Weg wählte der Mathematiker Elie Cartan. Zu diesem Zweck benutzte er das Konzept der Parallelverschiebung von infinitesimalen Vektoren. Man betrachtet den Kristall als Kontinuum und untersucht seine differentialgeometrische Eigenschaften als Mannigfaltigkeit

im Raum. Ausgehend von einem Punkt  $C$  auf dieser Mannigfaltigkeit zeichnet man zwei infinitesimale Vektoren  $d_1x_i(C)$  und  $d_2x_i(C)$ , die in einem diskreten Kristall zwei Vektoren von endlicher Länge entsprechen würden, entlang zweier Richtungen. Jetzt transportiert man jeden einzelnen um einen infinitesimalen Betrag jeweils parallel zum anderen, also als erstes  $d_1x_i(C)$  parallel zu  $d_2x_i(C)$  und anschließend  $d_2x_i(C)$  parallel zu  $d_1x_i(C)$ . Am Ende bekommt man jeweils zwei neue Vektoren,  $d_1x_i(B)$  im Punkt  $B$  und  $d_2x_i(D)$  im Punkt  $D$ . Nach diesem infinitesimalen Transport bekommt man

$$\begin{aligned} d_1x_i(B) &= d_1x_i(C) - \Gamma_{ijk} d_1x_k d_2x_j, \\ d_2x_i(D) &= d_2x_i(C) - \Gamma_{ijk} d_2x_k d_1x_j \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Der Schließungsfehler ergibt sich als

$$\begin{aligned} db_i &:= d_1x_i(C) + d_2x_i(D) - d_1x_i(B) - d_2x_i(C) \\ &= \Gamma_{ijk} (d_1x_k d_2x_j - d_2x_k d_1x_j) = \Gamma_{ijk} dS_{kj}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

mit dem Flächenelement

$$dS_{kj} := d_1x_j d_2x_k - d_2x_j d_1x_k \quad (\text{A.15})$$

aufgespannt durch die vier infinitesimalen Vektoren  $d_1x_i(C)$ ,  $d_2x_i(C)$ ,  $d_1x_i(B)$  und  $d_2x_i(D)$ . Da der Tensor für das Flächenelement (A.15) antisymmetrisch in den beiden Indizes  $j$  und  $k$  ist, trägt nur der antisymmetrische Anteil  $\Gamma_{i[jk]}$  der Konnektion zum Schließungsfehler  $db_i$  bei. Weiterhin definiert man

$$T_{ijk} \equiv 2\Gamma_{i[kj]} \equiv (\Gamma_{ikj} - \Gamma_{ijk}) \quad (\text{A.16})$$

durch die antisymmetrische Konnektion  $\Gamma_{i[kj]}$  den Cartanschen Torsions-Tensor. Dieser stellt einen Tensor dritter Stufe dar, der einen Zusammenhang (A.14) zwischen dem Flächenelement  $dS_{jk}$  und dem Schließungsfehler  $db_i$  herstellt. Mit der Einführung der Torsion (A.16) kann eine Beziehung zur Versetzungsdichte hergeleitet werden. Ausgehend von Gl. (A.14) gilt

$$db_i = \Gamma_{i[kj]} dS_{jk} = \frac{1}{2} T_{ijk} dS_{jk} = \frac{1}{2} \epsilon_{jkl} \alpha_{il} dS_{jk} = \alpha_{il} dS_l. \quad (\text{A.17})$$

Dabei wurde die Relation

$$T_{ijk} := \epsilon_{jkl} \alpha_{il} \quad (\text{A.18})$$

zwischen dem Tensor der Torsion und dem Versetzungsdichtetensor eingeführt und die Beziehung

$$dS_l := \frac{1}{2} \epsilon_{jkl} dS_{jk} \quad (\text{A.19})$$

zwischen dem antisymmetrischen Tensor  $dS_{jk}$  und dem axialen Vektor  $dS_l$  für das Flächenelement benutzt. Damit ist auch die Gl. (5.23) reproduziert. Durch die Gl. (A.18)

ist also ein Zusammenhang zwischen der Cartanschen-Torsion und dem Versetzungsdichtetensor gegeben. Vergleicht man weiterhin die Gl. (A.16) mit der Gl. (6.8), so sieht man, daß wenn die Konnektion der Mannigfaltigkeit folgendermaßen

$$\Gamma_{ikj} = \beta_{ik,j} \quad (\text{A.20})$$

gegeben ist, diese Mannigfaltigkeit einen teleparallelen Raum beschreibt. Somit läßt sich im linearen Fall eine Beziehung für den symmetrischen  $\Gamma_{(ij)k}$  und antisymmetrischen  $\Gamma_{[ij]k}$  Anteil der Konnexion mit den entsprechenden Anteilen der Distorsion herstellen

$$\Gamma_{(ik)j} = e_{ik,j}, \quad \Gamma_{[ik]j} = \omega_{ik,j}. \quad (\text{A.21})$$

Der Torsionstensor läßt sich mit der Konnexion (A.20) als

$$T_{ijk} = \beta_{ik,j} - \beta_{ij,k} \quad (\text{A.22})$$

schreiben.

### A.3 Die Taylorreihen der modifizierten Bessel Funktionen

In diesem Anhang geben wir die Taylorreihe Entwicklung der modifizierten Bessel-Funktionen für das Nahfeld  $r \rightarrow 0$  an. Sie lautet (siehe z.B. [141])

$$K_0\left(\frac{r}{\ell}\right) \approx -\left[\ln\frac{r}{2\ell} + \gamma_c\right] - \left[\ln\frac{r}{2\ell} - (1 - \gamma_c)\right] \frac{r^2}{4\ell^2} + O(r^4), \quad (\text{A.23})$$

$$K_1\left(\frac{r}{\ell}\right) \approx \frac{1}{r\ell} + \frac{2}{r^2\ell^2} - \left[\ln\frac{r}{2\ell} - \frac{(1 - 2\gamma_c)}{2}\right] \frac{r}{2\ell} + O(r^3), \quad (\text{A.24})$$

$$K_2\left(\frac{r}{\ell}\right) \approx -\frac{1}{2} + \frac{2}{r^2\ell^2} - \left[\ln\frac{r}{2\ell} - \left(\frac{3}{4} - \gamma_c\right)\right] \frac{r^2}{8\ell^2} + O(r^4), \quad (\text{A.25})$$

dabei ist  $\gamma_c = 0.57721566$  die Euler Konstante. Durch die ersten Terme in den Taylorreihen Entwicklungen werden die Singularitäten für die Distorsionsfelder  $\beta_{ij}$  und Spannungsfelder  $\sigma_{ij}$  in der klassischen Elastizität aufgehoben. Die anderen Terme verschwinden an der Stelle  $r = 0$ .



# Literaturverzeichnis

- [1] A.A. Golebiewska-Lasota, Dislocations and gauge invariance, *Int. J. Engng. Sci.* **17** (1979), 329–333.
- [2] A. Kadić, D.G.B. Edelen, A Yang-Mills type minimal coupling theory for materials with dislocations and disclinations, *Int. J. Eng. Sci.* **20** (1982) 433–438.
- [3] A. Kadić, D.G.B. Edelen, A Gauge Theory of Dislocations and Disclinations, in: *Lecture Notes in Physics*, Vol. 174, Springer, Berlin (1983).
- [4] D.G.B. Edelen, A correct, globally defined solution of the screw dislocation problem in the gauge theory of defects, *Int. J. Eng. Sci.* **34** (1996) 81–86.
- [5] M.C. Valsakumar, D. Sahoo, *Bull. Mater. Sci.* **10** (1988) 3.
- [6] C. Malyshev, The  $T(3)$ -gauge model, the Einstein-like gauge equation and Volterra Dislocations with modified asymptotics, *Ann. Phys., NY* **286** (2000) 249–277.
- [7] P. Sharma, S. Ganti, Gauge-field theory solution of the elastic state of a screw dislocation in a dispersive (non-local) crystalline solid, *Proc. R. Soc. A* **461** (2005) 1081–1095.
- [8] M. Lazar, Dislocation theory as a 3-dimensional gauge theory, *Ann. Phys. Lpz* **9** (2000) 461–473.
- [9] M. Lazar, An elastoplastic theory of dislocations as a physical field theory with torsion, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002) 1983–2004.
- [10] M. Lazar, A nonsingular solution of the edge dislocation in the gauge theory of dislocations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003) 1415–1437.
- [11] M.C. Valsakumar, D. Sahoo, Force between two parallel screw dislocations - gauge theory result, *Physics Letters A* **215** (1996) 305–308.
- [12] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *J. Appl. Phys.* **54** (1983) 4703–4710.
- [13] J.R. Rice, A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *J. Appl. Mech.* **35** (1968) 379–386.

- [14] S. Lie, Arch. Math. **8** (1883) 187; **9** (1884) 431.
- [15] S. Lie, Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, revised and edited by G. Scheffers, B. G. Teubner, Leipzig, 1891.
- [16] S. Lie, Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linearer partieller Differentialgleichungen, Arch. for Math., Vol. VI, No. 3, Kristiana, 1881, p. 328.
- [17] S. Lie, Gesammelte Abhandlungen, Vol. **1–6** Teubner, Leibzig, 1922-1937.
- [18] L.V. Ovsiannikov, *Group properties of Differential Equations*, (Siberian Division, USSR Academy of Sciences, Novosibirsk (1962) [English Translation by G. W. Bluman, 1967 (unpublished)])
- [19] L.V. Ovsiannikov, *Group Analysis of Differential Equations*, (Siberian Division, USSR Academic Press, New York, 1982)[Russ. original, Nauka, Moscow (1978).
- [20] G.W. Bluman, Construction of solutions to partial differential equations by the use of transformation groups, Thesis, California Institute of Technology (1967).
- [21] G.W. Bluman, S. Kumei, *Symmetries and differential equations*, Springer (1989).
- [22] G.W. Bluman, C. Anco, *Symmetry and integration methods for differential equations*, Springer (2002).
- [23] N.H. Ibragimov, R.L. Anderson *Lie-Bäcklund Transformations in Applications*, Dordrecht: Reidel (1979).
- [24] N.H. Ibragimov, *Transformation group applied to mathematical physics*, Dordrecht: Reidel (1985).
- [25] E. Noether, Invariante Variationspropleme, Goettinger Nachrichten Mathematisch - Physikalische Klasse, **2** (1918), 235–256.
- [26] E. Bessel-Hagen, Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik, Mathematische Annalen **84** (1921), 259.
- [27] P.J. Olver, Conservation laws in elasticity. I. General results, Arch. Rational. Mech. Anal. **85** (1984) 111–130.
- [28] P.J. Olver, Conservation laws in elasticity. II. Linear homogeneous elastostatics, Arch. Rational. Mech. Anal. **85** (1984) 131–160; Errata in **102** (1988) 385–387.
- [29] W. Günther, Über einige Randintegrale der Elastostatik, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. **14** (1962) 53–72.
- [30] J.K. Knowles, E. Sternberg, On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics, Arch. Rational. Mech. Anal. **44** (1972) 187–211.

- [31] D.C. Fletcher, Conservation laws in linear elastodynamics, Arch. Rational. Mech. Anal. **60** (1975) 329–353.
- [32] P.J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer, New York (1986).
- [33] E. et F. Cosserat, *Theorie des Corps Deformables*, Paris: A. Hermann and Fills 1909.
- [34] W. Günther, Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. **10** (1958) 195–213.
- [35] H. Schäfer, Das Cosserat Kontinuum, Z. Ang. Math. Mech. **47** (1967) 485–498.
- [36] R.D. Mindlin, Micro-structure in linear elasticity, Arch. Rational. Mech. Anal. **16** (1964) 51–78.
- [37] A.C. Eringen, Nonlinear theory of simple micro-elastic solids-I, Int. J. Engng. Sci. **2** (1964) 189–203.
- [38] N.A. Fleck, J.W. Hutchinson, Strain gradient plasticity, In: *Advances in applied mechanics*, Vol. 33, Academic press, New York, p.p. 295–361.
- [39] N.A. Fleck, J.W. Hutchinson, A reformulation of strain gradient plasticity, J. Mech. Phys. Solids **49**, (2001) 2245–2271.
- [40] E. Kröner, *Vorlesung über Theoretische Physik*, 5 Auflage, Band 2, Kapitel 9, Akad. Verlagsges., Leipzig (1964).
- [41] K. Kondo, On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding, Proc.2. Japan nat. Congress of appl. Mech. (1952), 41–47.
- [42] K. Kondo, Memoirs of the unifying study of the basic problems in engineering sciences by means of geometry, Vol. I, Tokyo: Gakujutsu Bunken Fukyu-Kai (1955).
- [43] B.A. Bilby, R. Bullough and E. Smith, Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry, Proc. R. Soc. Lond. A **231**, (1955), 263–273.
- [44] B.A. Bilby, and E. Smith, Continuous distributions of dislocations. III, Proc. R. Soc. Lond. A **236**, (1956), 481–505.
- [45] E. Kröner, *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Springer, (1958).
- [46] E. Cartan, On manifolds with an Affine Connection and the Theory of General Relativity (Engl. transl. of French original 1922/23) (Napoli: Bibliopolis).

- [47] E. Kröner, Über eine besondere Symmetrie zwischen Verschiebungen und Spannungsfunktionen in der ebenen Elastostatik, Ing. Arch. **45** (1976) 217–221.
- [48] P. Chadwick, *Continuum mechanics: Concise Theory and Problems*, Dover Publications (1999).
- [49] R. Greve, *Kontinuumsmechanik. Ein Grundkurs für Ingenieure und Physiker*, Springer Verlag (2003).
- [50] Y.C. Fung and P. Tong, *Classical and Computational Solid mechanics*, Advanced Series in Engineering Science, World Scientific Publishing (2001).
- [51] B. de Saint-Venant, Memoire sur la Torsion des Primes Mem. des Savants etrangers, Paris 1855.
- [52] L.D. Landau and E.M Lifshitz, *Theory of elasticity*, Vol.7 of Course of Theoretical physics (1970).
- [53] E. Beltrami, Osservazioni sulle nota precedente (Morera), Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fiz. mat. natur. V. Ser. **1**/1 (1892) 141–142.
- [54] G. Morera, Soluzione generale delle equazione indefinite dell’equilibrio di un corpo continuo, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fiz. mat. natur. V. Ser. **1**/1 (1892) 141–142.
- [55] J.C. Maxwell, On reciprocal figures, frames and diagrams of forces. Trans. R. Soc. of Edinburgh. **26**, (1870) 1–40.
- [56] G.R. Airy, On the strains in the interior of Beams, Phil. Trans. R. Soc. Lond. **153**, (1863) 49–80.
- [57] J.D. Eshelby, The force on an elastic singularity, Phil. Trans. Roy. Soc. London A **244** (1951) 87–112.
- [58] J.D. Eshelby, The continuum theory of lattice defects, In: Prog. Solid State Physics, ed. F. Seitz and D. Turnbull, **3** (1956) 79–114, N.Y.: Academic Press.
- [59] J.D. Eshelby, The elastic energy-momentum tensor, J. Elasticity **5** (1975) 321–335.
- [60] J.L. Sanders, On the Griffith-Irwin fracture theory, J. Appl. Mech. **27** (1960) 352.
- [61] G.P. Cherapanov, Crack propagation in continuous media, Appl. Math. Mech. (translation of PMM) **31** (1967) 476–488.
- [62] J.R. Rice, Mathematical analysis in the mechanics of fracture. In: Fracture: An advance Treatise, ed. H. Liebovitz, **2** (1968) 191–311. N.Y. Academic Press.

- [63] J.W. Hutchinson, Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **16** (1968) 13.
- [64] J.W. Hutchinson, Plastic stress and strain fields at a crack tip, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **16** (1968) 337.
- [65] P.M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York (1953).
- [66] R.D. Mindlin, Influence of Couple-stresses on Stress Concentrations, *Experimental Mechanics* **3** (1963) 1–7.
- [67] A.E. Green, R.S. Rivlin, Multipolar Continuum Mechanics, *Arch. Rational. Mech. Anal.* **17** (1964) 113–147.
- [68] A.C. Eringen, E.C. Suhubi, Nonlinear theory of simple microelastic solid, *Int. J. Engng. Sci.* **2**(1964) 189–203, 389–404.
- [69] K.Z. Markov, On the dilatation theory of elasticity, *Z. Ang. Math. Mech.* **61** (1981) 349–358.
- [70] A.C. Eringen, Theory of thermo-microstretch elastic solids, *Int. J. Engng. Sci.* **28** (1990) 1291–1301.
- [71] A.C. Eringen, *Microcontinuum Field Theories I: Foundations and Solids*, Springer, New York (1999).
- [72] J. Jaric, Conservation laws of the  $J$ -integral type in micropolar elastostatics, *Int. J. Engng. Sci.* **16** (1978) 967–984.
- [73] J. Jaric, The energy release rate in quasi-static crack propagation and  $J$ -integral, *Int. J. Engng. Sci.* **22** (1986) 767–778.
- [74] T.-M. Dai, Some path-independent integrals for micropolar media, *Int. J. Engng. Sci.* **22** (1986) 729–735.
- [75] M. Vukobrat, Conservation laws in micropolar elastodynamics and path-independent integrals, *Int. J. Engng. Sci.* **27** (1989) 1093–1106.
- [76] E. Pucci, G. Saccomandi, Symmetries and conservation laws in micropolar elasticity, *Int. J. Engng. Sci.* **28** (1990) 557–562.
- [77] V.A. Lubarda, X. Markenscoff, On conservation integrals in micropolar elasticity, *Philosophical Magazine* **83** (2003) 1365–1377.
- [78] E. Pucci, G. Saccomandi, Conservation laws in the elastic theory of materials with voids, *Boll. Unione Mat. Ital.* **VII**, Ser. B 6 (1992) 425–450.
- [79] M. Lazar, C. Anastassiadis, Lie point symmetries and conservation laws in microstretch and micromorphic elasticity, *Int. J. Engng. Sci.* **44** (2006) 1571–1582.

- [80] M. Lazar, On conservation and balance laws in micromorphic elastodynamics, *J. Elasticity* **88** (2007) 63–78.
- [81] G.A. Maugin, *Material Inhomogeneities in Elasticity*. Chapman and Hall, London (1993).
- [82] Maugin, G.A., 1998. On the structure of the theory of polar elasticity, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **356**, 1367–1395.
- [83] MacFarlane, A.J., Tait, W., 1972. Tensor formulation of spin-1 and spin-2 fields, *Commun. math. Phys.* **24**, 211–224.
- [84] R.A. Toupin, Elastic Materials with Couple-stresses, *Arch. Rational. Mech. Anal.* **11** (1962), 385–414.
- [85] R.A. Toupin, Theories of elasticity with Couple-stress, *Arch. Rational. Mech. Anal.* **17** (1964), 85–112.
- [86] M. Lazar, G.A. Maugin, On microcontinuum field theories: The Eshelby stress tensor and incompatibility conditions, *Phil. Mag.* **87**, 3853–3870.
- [87] V.A. Lubarda, X. Markenscoff, Conservation integrals in couple stress elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **48** (2000) 553–564.
- [88] G. Mack, A. Salam, Finite-component field representation of the conformal group, *Annals of Physics* **53** (1969) 174–202.
- [89] R.D. Mindlin, Influence of couple-stresses on stress concentrations, *Exp. Mech.* **3** (1963), 1-7.
- [90] M. Lazar, C. Anastassiadis, Lie Point Symmetries, Conservation and Balance laws in Linear Gradient Elastodynamics, *J. Elasticity* **88** (2007) 5-25.
- [91] B. Budiansky, J.R. Rice, Conservation laws and energy-release rate, *Journal of Applied Mechanics* **40** (1973) 201–203.
- [92] J.Y. Chen, Y. Wei, Y. Huang, J.W. Hutchinson, K.C. Hwang, The crack tip fields in strain gradient plasticity: the asymptotic and numerical analyses, *Eng. Frac. Mech.* **64** (1999) 625–648.
- [93] J.D. Eshelby, The calculation of energy release rates. *Prospects of Fracture Mechanics*, e.d. G.C. Sih, pp. 69–84. Noordhoff, Leyden (1975).
- [94] H.G. Georgiadis, I. Vardoulakis, Anti-plane shear Lamb’s problem treated by gradient elasticity with surface energy, *Wave Motion* **28** (1998) 353–366.
- [95] H.G. Georgiadis, The mode III crack problem in microstructured solids governed by dipolar gradient elasticity, *Journal of Applied Mechanics* **70** (2003) 517–530.

- [96] H.G. Georgiadis, I. Vardoulakis, E.G. Velgaki, Dispersive Rayleigh-wave propagation in microstructured solids characterized by dipolar gradient elasticity, *J. Elasticity* **74** (2004) 17–45.
- [97] H.G. Georgiadis, C.G. Grentzelou, Energy theorems and the  $J$ -integral in dipolar gradient elasticity, *Int. J. Solids and Structures* **43** (2006) 5690–5712.
- [98] K.O. Thielheim, Note on classical fields of higher order, *Proc. Phys. Soc.* **91** (1967) 798–801.
- [99] Y.-N. Huang, R.C. Batra, Energy-momentum tensors in nonsimple elastic dielectrics, *J. Elasticity* **42** (1996) 275–281.
- [100] V.K. Kalpakides, E.K. Agiasofitou, On material equations in second gradient electroelasticity, *J. Elasticity* **67** (2002) 205–227.
- [101] R. Kienzler, G. Herrmann, *Mechanics in Material Space*, Berlin: Springer (2000).
- [102] M. Lazar, H.O.K. Kirchner, The Eshelby stress tensor, angular momentum tensor and dilatation flux in gradient elasticity, *Int. J. Solids Structures* **44** (2007) 2477–2486.
- [103] G.A. Maugin, C. Trimarco, Pseudomomentum and material forces in nonlinear elasticity: variational formulations and application to brittle fracture, *Acta Mechanica* **94** (1992) 1–28.
- [104] G.A. Maugin, *Nonlinear Waves in Elastic Crystals*, Oxford University Press (1999).
- [105] G.A. Maugin, C.I. Christov, *Nonlinear Waves and Conservation laws. Nonlinear Duality between Elastic Waves and Quasi-Particles*. In: C.J. Christov, A. Guran, editors. *Selected Topics in Nonlinear Wave Mechanics*, Boston, MA: Birkhäuser (2002) p. 116–160.
- [106] E. Meletlidou, J. Pouget, G.A. Maugin, E.C. Aifantis, Invariant relations in Boussinesq-type equations, *Chaos, Solitons and Fractals* **22** (2004) 613–625.
- [107] R.D. Mindlin, N.N. Eshel, On first strain-gradient theories in linear elasticity, *Int. J. Solids Structures* **4** (1968) 109–124.
- [108] R.D. Mindlin, Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics, *J. Elasticity* **2** (1972) 217–282.
- [109] B. Podolsky, C. Kikuchi, A generalized electrodynamics, *Phys. Rev.* **65** (1944) 228–234.
- [110] V. Volterra, L Equilibre des corps elastiques multiplement connexes, *Annls. scient. Ecol. norm. sup., III Paris* **24** (1907), 401–517.

- [111] F.C. Frank, Crystal dislocations-Elementary concepts and definitions, Philos. Mag. VII Ser. **42** (1951), 809–819.
- [112] E. Kröner, *Continuum Theory of Defects*, Les Houches, Session XXXV, 1980 Physique des Defaults/Physics of Defects North-Holland Publishing Company (1981).
- [113] J.F. Nye, Some geometrical relations in dislocated crystals, Acta Met. **1** (1953), 153–162.
- [114] J.M. Burgers, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. **42** (1939), 293, 378.
- [115] F.W. Hehl, Paul von der Heide and G.D. Kerlick, General relativity with Spin and torsion: Foundations and prospects, Rev. Mod. Phys. **48**, No.3, (1976), 393–416.
- [116] F.W. Hehl, J.D. McCrea, F.W. Mielke and Y. Ne’eman, Phys. Rep. **258**, (1995), 1.
- [117] D.G.B. Edelen, D.C. Lagoudas, Gauge Theory and Defects in Solids, Mechanics and Physics of Discrete Systems, vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1988.
- [118] E.F. Holländer, The geometric equation of dislocation dynamics, Czech. J. Phys. B **12** (1962), 35–47.
- [119] H. Schaefer, Maxwell-Gleichungen, Energiesatz und Lagrangedichte in der Kontinuumstheorie der Versetzungen, Acta Mechanica **10** (1970), 59–66.
- [120] M.O. Peach, J.S. Koehler, Forces extended on dislocations and the stress field produced by them, Phys. Rev. **80** (1950), 436–439.
- [121] U.E. Schröder, Spezielle Relativitätstheorie Verlag Harri Deutsch, (1994).
- [122] R. deWit, Theory of Disclinations: IV. Straight Disclinations, Journal of Research of the National Bureau of Standards–A. Physics and Chemistry **77A**, No. 5, (1973), 607–658.
- [123] M. Lazar, Dislocations in the field theory of elastoplasticity, Comp. Mat. Sc. **28** (2003) 419–428.
- [124] G. Leibfried, K. Luecke, Über das Spannungsfeld einer Versetzung, Zeitschrift für Physik **126** (1949), 450–464.
- [125] W. Nowacki, Theory of asymmetric Elasticity, Pergamon Press, Warsaw, 1986.
- [126] S. Kessel, Spannungsfelder einer Schraubenversetzung und einer Stufenversetzung im Cosseratschen Kontinuum, Z. Ang. Math. Mech. **50**, (1970), 547–553.
- [127] W. Nowacki, Arch. Mech. **26**, (1974) 3.



- [128] R. D. Mindlin and H. F. Tiersten, Effects of couple stresses in linear elasticity, Arch. Rational. Mech. Anal. **23** (1962) 119–129.
- [129] F. Hehl und E. Kröner, Z. Naturforschg. **20a**, (1965), 336–350.
- [130] A.C. Eringen, W.D. Claus, Jr., A Micromorphic Approach to Dislocation Theory and its Relation to several Existing Theories, Fundamental Aspects of Dislocation Theory, Nat. Bur. Stand. (U.S.) Spec. Publ. **317**, **II**, (1970), 1023–1040.
- [131] M. Lazar, G.A. Maugin, Nonsingular stress and strain fields of dislocations and disclinations in first strain gradient elasticity, Int. J. Eng. Sci. **43** (2005) 1157–1184.
- [132] C. F. Frank, Proc. Phys. Soc. A **62** (1949) 131.
- [133] C. F. Frank, Advances in Physics **1** (1952) 91.
- [134] J. D. Eshelby, Uniformly moving dislocations, Proc. Phys. Soc. A **62** (1949) 307–314.
- [135] P. Sharma, X. Zhang, Gauge field theoretic solution of a uniformly moving screw dislocation and admissibility of supersonic speeds, Phys. Let. A. **349** (2006) 170–176.
- [136] P. Gumbsch, H. Gao, Dislocations faster than the speed of sound, Science **12** Vol. 283, No. 5404 (1999) 965–968.
- [137] J. D. Eshelby, The equation of Motion of a Dislocation, Phys. Rev. **90** (1956) 248–255.
- [138] J. D. Eshelby, Supersonic Dislocations and Dislocations in Dispersive Media, Proc. Phys. Soc. **10** (1956) 1013–1019.
- [139] J. Weertman, Dislocations in uniform motion on slip or climb planes having periodic force law, Mathematical theory of dislocations, ASME, ed.T. Mura, (1969), 179–202.
- [140] J. Weertman, J.R. Weertman, Moving Dislocation solution, in Dislocation in Solids, E.F.R.N. Nabarro, Editor North-Holland Amsterdam (1980), p.p.1.
- [141] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Editor Alan Jeffrey, Academic Press, Inc., New York, (1994).



# Publikationsliste

- M. Lazar, C. Anastassiadis, Lie point symmetries and conservation laws in microstretch and micromorphic elasticity, *Int. J. Engng. Sci.* **44** (2006) 1571–1582.
- M. Lazar, C. Anastassiadis, Lie point symmetries, conservation and balance laws in linear gradient elastodynamics, *J. Elasticity* **88** (2007) 5–25.
- M. Lazar, C. Anastassiadis, Is compressible elasticity a conformal field theory?, *Comptes Rendus Mecanique* (2008), in press.
- M. Lazar, C. Anastassiadis, Balance laws in micromorphic elasticity, *Proceedings of CMDS 11* (2008), in press.
- M. Lazar, C. Anastassiadis, The gauge theory of dislocations: static solution of screw and edge dislocations, submitted to *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*.
- C. Anastassiadis, M. Lazar, The gauge theory of dislocations: conservation and balance laws, in preparation.



# Danksagung

Zuletzt möchte ich mich bei allen Leuten bedanken, die mich während dieser Arbeit unterstützt haben:

Meinem Betreuer Herrn Dr. Markus Lazar gilt mein Dank für die interessante und fruchtbare Zusammenarbeit innerhalb des Emmy Noether Forschungsprojektes und die gemeinsam entstandenen Publikationen. An dieser Stelle sei auch die angenehme Arbeitsatmosphäre zu erwähnen, welche für das wissenschaftliche Arbeiten sehr motivierend gewirkt hat. An der Seite eines theoretischen Physikers mitzuarbeiten, ermöglichte erst das Betrachten von physikalischen Problemen aus einem anderen Blickwinkel und stellte eine Bereicherung zu den meist technisch geprägten Hilfsmittel dar, die einem Ingenieur zur Verfügung stehen.

Weiterhin möchte ich mich beim Herrn Prof. Dr. Tsakmakis für die wertvollen Diskussionen über Materialien mit Mikrostruktur, die einjährige finanzielle Unterstützung und die Übernahme des Korreferats dieser Arbeit bedanken.

Der DFG ist für die Finanzierung meiner Stelle in diesem, zwischen Naturwissenschaften und Ingenieurwissenschaften angesiedelten, interdisziplinären Emmy Noether Forschungsprojekt zu danken.

Schließlich will ich meinen Eltern und meinem Bruder meinen herzlichsten Dank aussprechen, die für mich in schwierigen Zeiten eine moralische Stütze gewesen sind und auch allen Freundinnen und Freunden insbesondere dem Herrn Dr. Bröse, für seine freundliche Art und Weise mir bei Problemen mit dem Rechner zu helfen und dem Herrn Dr. Karatsiolis für die Erstellung eines Bildes in dieser Arbeit.



# Lebenslauf

16/03/1974		Geboren in Athen
09/1979	– 06/1985	Besuch der Grundschule Erasmios
09/1986	– 06/1992	Besuch der deutschen Schule von Athen (Dörpfeld Gymnasium) und Erwerb der Hochschulreife (Abitur)
10/1992	– 10/1995	Maschinenbaustudium an der Universität Paderborn (Vordiplom)
04/1996	– 09/2000	Studium im Fachbereich Mechanik der TUD (Diplom Ingenieur)
03/2001	– 09/2003	Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Institut für Hydraulik im Fachbereich Bauingenieurwesen
01/2004	– 02/2004	Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachbereich Mechanik, Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik (AGI)
02/2004	– 10/2005	Promotionsstudent in Fachbereich Mechanik, Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik (AGI)
11/2005	– 12/2005	Forschung in der Emmy Noether Gruppe im Fachbereich Mechanik im Fachgebiet Kontinuumsmechanik an der TUD
01/2006	– 11/2007	Forschung in der gleichen Emmy Noether Gruppe im Fachbereich Physik im Institut für Festkörperphysik an der TUD